M.E.JUMAYEV

MATEMATIKA O‘QITISH METODIKASI

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA
O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

M.E.JUMAYEV

MATEMATIKA O‘QITISH METODIKASI

TOSHKENT – 2016

Taqrizchilar:

Formonov Shokirjon — O'zbekiston fanlar akademiyasining akademigi, fizika-matematika fanlar doktori, professor.

Mashrabjon Mamatov — O'zbekiston Milliy Universitetining professori, fizika-matematika fanlari doktori,

Mamarajab Tojiyev — pedagogika fanlari doktori, professor.

Ushbu darslik universitet va pedagogika universitetlarining matematika fakulteti talabalari uchun «Matematika o'qitish metodikasi» fanining dasturi asosida yozilgan bo'lib, unda asosan umumiy metodikaga doir bo'lgan matematika o'qitish metodikasining maqsadi, mazmuni, formasi, metod va vositalari orasidagi munosabatlar pedagogik, psixologik va didaktik nuqtayi nazardan ochib berilgan.

Mazkur darslikda keltirilgan barcha nazariy va amaliy mavzulaming mazmuni matematika o'qitish metodikasi fanining amaldagi dasturiga to'la mos keladi. Darslikning barcha boblarining oxirida mustaqil ishlash uchun misollar, o'z-o'zini nazorat qilish uchun savollar hamda tayanch iboralar keltirilgan.

Ushbu darslik universitetlaming matematika fakulteti bakalavr yo'nalishidagi talabalari hamda matematikadan ta'lim yo'nahshidagi magistrlar uchun tavsiya etilgan.

SO'ZBOSHI

Ushbu darslik matematika va amaliy matematika bakalavr talabalar uchun matematika o'qitish metodikasi kursining dasturi asosida yozilgan. Darslikda matematik ta'limning maqsadi, mazmuni, formasi, metodlari va uning vositalarini matematika darslariga tatbiq qilish qonuniyatlari psixologik, pedagogik va didaktik nuqtayi nazardan bayon qilingan. Matematik ta'limni isloh qilish, кadrlar tayyorlash milliy dasturi va uzluksiz ta'limni amalga oshirish masalalari ham bayon etilgan.

Ma'lumki, matematika fani mavjud moddiy dunyodagi narsalarning fazoviy formalari va ular orasidagi miqdoriy munosabatlarni o'rganish jarayonida «ilmiy izlanish» metodlaridan foydalanadi. Shuning uchun ham ushbu darslikda ilmiy izlanish metodlaridan kuzatish va tajriba, taqqoslash, analiz hamda sintez, umumlashtirish, abstraktlashtirish va konkretlashtirishlarni matematika darslarida qo'llanishi ilmiy-metodik jihatidan tushuntirishga harakat qilingan. Matematikani o'qitish jarayonida fikrlash formalarini paydo qilish metodikasi ham yoritilgan, ya'ni hissiy bilish (sezgi, idrok, tasavvur) bilan mantiqiy bilish (tushuncha, hukm, xulosa) orasidagi mantiqiy bog'lanishlar ochib berilgan. Matematik tushuncha va uni o'quvchilar ongida shakllantirish metodikasi, matematik hukm va uning turlari bo'lmish aksioma, postulat va teoremalarni o'quvchilarga o'rgatish metodikalari yoritilgan. Matematik xulosa va uning induktiv, deduktiv hamda analogik turlarini dars jarayonidagi tatbiqlari ko'rsatilgan. Matematika fanini o'qitishdagi didaktik prinsiplarning turlarini o'rgatishga alohida ahamiyat berilgan.

Darslikda yangi pedagogik texnologiya asosida o'qitishning an'anaviy va noan'anaviy metodlaridan: ma'ruza, suhbat, mustaqil ish, evristik va muammoli ta'lim metodlarini dars jarayonida qo'llanilishiga katta ahamiyat berilgan. Matematika darsi, uning tuzilishi va uni tashkil qilish metodikasi, matematika darsining turlari, darsga tayyorgarlik va uning tahlili matematika darsiga qo'yilgan talablar ochib berilgan. Darslikda yana son tushunchasini kiritish va uni kengaytirish, ular ustida to'rt amalni bajarish, maktabdagi ayniy shakl almashtirishlarni o'rgatish,

I bob
UMUMTA'LIM MAKTABLARIDA MATEMATIKA O'QITISH MASALALARI

1-§. Matematika o'qitish metodikasi predmeti

Matematika so'zi qadimgi grekcha — *mathema* so'zidan olingan bo'lib, uning ma'nosi «fanlarni bilish» demakdir. Matematika fanining o'rganadigan narsasi (obyekti) materiyadagi mavjud narsalarning fazoviy formalari va ular orasidagi miqdoriy munosabatlardan iborat. Hozirgi davrda matematika fani shartli ravishda ikkiga ajraladi:

1) elementar matematika, 2) oliy matematika.

Elementar matematika ham mustaqil mazmunga ega bo'lgan fan bo'lib, u oliy matematikaning turli tarmoqlaridan, ya'ni nazariy arifmetikadan, sonlar nazariyasidan, oliy algebradan, matematik analizdan va geometriyaning mantiqiy kursidan olingan elementar ma'lumotlar asosiga qurilgandir.

Oliy matematika fani esa real olamning fazoviy formalari va ular orasidagi miqdoriy munosabatlarni to'la hamda chuqur aks ettiruvchi matematik qonuniyatlarni topish bilan shug'ullanadi.

Elementar matematika fani maktab matematika kursining asosini tashkil qiladi. Maktab matematika kursininng maqsadi o'quvchilarga ularning psixologik xususiyatlarini hisobga olgan holda matematik bilimlar sistemasini ma'lum usul (metodika) orqali o'quvchilarga yetkaziladi. (Metodika so'zi grekcha so'z bo'lib, «yo'l» degan ma'noni anglatadi.) Matematika metodikasi pedagogika va didaktika fanining asosiy bo'limlaridan biri bo'lib, jamiyatimiz taraqqiyoti darajasida ta'lim maqsadlariga mos keluvchi matematikani o'qitish, o'rganish qonuniyatlarini o'rganadigan mustaqil fandir.

Matematika metodikasi ta'lim jarayoni bilan bog'liq bo'lgan quyidagi uch savolga javob beradi:

1. Nima uchun matematikani o'rganish kerak?
2. Matematikadan nimalarni o'rganish kerak?
3. Matematikani qanday o'rganish kerak?

Matematika metodikasi haqidagi tushuncha birinchi bo'lib, shveytsariyalik pedagog-matematik G. Pestalotsining 1803-yilda yozgan «Sonni ko'rgazmali o'rganish» asarida bayon qilingan. XVII asrning birinchi yarmidan boshlab matematika o'qitish metodikasiga doir masalalar bilan rus olimlaridan akademik S.E. Gurev (1760—1813), XVIII asrning birinchi va ikkinchi yarmidan esa N.I. Lobachevskiy (1792—1856), I.N. Ulyanov (1831—1886). L.N. Tolstoy (1828—1910) va atoqli metodist-matematik S.I.Shoxor-Trotskiy (1853—1923), A.N. Ostrogradskiy va boshqalar shug'ullandilar va ular matematika faniga ilmiy nuqtayi nazardan qarab, uning progressiv asoslarini ishlab chiqdilar. Masalan, A.N. Ostrogradskiy «Ong kuzatishdan keyin paydo bo'ladi, ong real, mavjud olamga asoslangan» deb yozgan edi.

Geometriya metodikasidan materiallar (Материалы по методике геометрии, 1884-yil, 8-bet.).

Keyinchalik matematika o'qitish metodikasining turli yo'nalishlari bilan N.A. Izvolskiy, V.M. Bradis, S.E. Lyapin, I.K. Andronov, N.A. Glagoleva, I.Ya.Dempman, A.N. Barsukov, S.I. Novoselov, A.Ya. Xinchin, N.F. Chetveruxin, A.N. Kolmogorov, A.I. Markushevich, A.I. Fetisov va boshqalar shug'ullandilar.

1970-yildan boshlab maktab matematika kursining mazmuni yangi dastur asosida o'zgartirildi, natijada uni o'qitish metodikasi ham ishlab chiqildi. Hozirgi dastur asosida o'qitilayotgan maktab matematika fanining metodikasi bilan professorlardan V.M. Kolyagin, R.S. Cherkasov, P.M. Erdniyev, J. Ikramov, N. G'aybullayev, T. To'laganov, A. Abduqodirov va boshqa metodist olimlar shug'ullanganlar va shug'ullanmoqdalar. Matematika o'qitish metodikasi pedagogika universitetlarining III—IV kurslarida o'tiladi. U o'zining tuzilishi xususiyatiga ko'ra shartli ravishda uchga bo'linadi.

1. Matematika o'qitishning umumiy metodikasi. Bu bo'limda matematika fanining maqsadi, mazmuni, formasi, metodlari va uning vositalarining metodik sistemasi, pedagogika, psixologiya qonunlari hamda didaktik prinsiplar asosida ochib beriladi.

2. Matematika o'qitishning maxsus metodikasi. Bu bo'limda matematika o'qitish umumiy metodikasining qonun va qoidalarining aniq mavzu materiallariga tatbiq qilish yo'llari ko'rsatiladi.

3. Matematika o'qitishning aniq metodikasi.

Bu bo'lim ikki qismdan iborat:

1. Umumiy metodikaning xususiy masalalari.
2. Maxsus metodikaning xususiy masalalari.

Masalan, VI sinfda matematika darslarini rejalashtirish va uni o'tkazish metodikasi deyilsa, bu umumiy metodikaning xususiy masalasi bo'lib hisoblanadi.

2-§. O‘rta umumta’lim maktablarida matematika o‘qitishning maqsadi

O‘rta maktablarda matematika o‘qitishning maqsadi quyidagi uch omil bilan belgilanadi:

1. Matematika o‘qitishning umumta’limiy maqsadi.
2. Matematika o‘qitishning tarbiyaviy maqsadi.
3. Matematika o‘qitishning amaliy maqsadi.

1. Matematika o‘qitishning umumta’limiy maqsadi o‘z oldiga quyidagi vazifalarni qo‘yadi:

a) o‘quvchilarga ma’lum bir dastur asosida matematik bilimlar tizimini berish. Bu bilimlar tizimi matematika fani to‘g‘risida o‘quvchilarga yetarli darajada ma’lumot berishi, ularni matematika fanining yuqori bo‘limlarini o‘rganishga tayyorlashi kerak. Bundan tashqari, dastur asosida o‘quvchilar o‘qish jarayonida olgan bilimlarining ishonchli ekanligini tekshira bilishga o‘rganishlari, ya’ni isbotlash va nazorat qilishning asosiy metodlarini egallashlari kerak;

b) o‘quvchilarning og‘zaki va yozma matematik bilimlarini tarkib toptirish. Matematikani o‘rganish o‘quvchilarning o‘z ona tillarida xatosiz so‘zlash, o‘z fikrini aniq, ravshan va lo‘nda qilib bayon eta bilish malakalarini o‘zlashtirishlariga yordam berishi kerak. Bu degan so‘z o‘quvchilarning har bir matematik qoidani o‘z ona tillarida to‘g‘ri gapira olishlariga erishish hamda ularni ana shu qoidaning matematik ifodasini formulalar yordamida to‘g‘ri yoza olish qobiliyatlarini atroflicha shakllantirish demakdir;

d) o‘quvchilarni matematik qonuniyatlar asosida real haqiqatlarni bilishga o‘rgatish. Bu yerda o‘quvchilarga real olamda yuz beradigan eng sodda hodisalardan tortib to murakkab hodisalargacha hammasining fazoviy formalari va ular orasidagi miqdoriy munosabatlarni tushunishga imkon beradigan hajmda bilimlar berish ko‘zda tutiladi.

Bunday bilimlar berish orqali esa o‘quvchilarning fazoviy tasavvur qilishlari shakllanadi hamda mantiqiy tafakkur qilishlari yanada rivojlanadi.

2. Matematika o‘qitishning tarbiyaviy maqsadi o‘z oldiga quyidagilarni qo‘yadi:

a) o‘quvchilarda ilmiy dunyoqarashni shakllantirish. Bu g‘oya bilish nazariyasi asosida amalga oshiriladi;

b) o‘quvchilarda matematikani o‘rganishga bo‘lgan qiziqishlarni tarbiyalash.

Ma'lumki, matematika darslarida o'quvchilar o'qishning dastlabki kunlaridanoq mustaqil ravishda xulosa chiqarishga o'rganadilar. Ular avvalo kuzatishlar natijasida, so'ngra esa mantiqiy tafakkur qilish natijasida xulosa chiqaradilar. Ana shu chiqarilgan xulosalar matematik qonuniyatlar bilan tasdiqlanadi.

Matematika o'qituvchisining vazifasi o'quvchilarda mustaqil mantiqiy fikrlash qobiliyatlarini shakllantirish bilan birga ularda matematikaning qonuniyatlarini o'rganishga bo'lgan qiziqishlarini tarbiyalashdan iboratdir;

d) o'quvchilarda matematik tafakkurni va matematik madaniyatni shakllantirish. Matematika darslarida o'rganiladigan har bir matematik xulosa qat'iylikni talab qiladi, bu esa o'z navbatida juda ko'p matematik tushuncha va qonuniyatlar bilan ifodalanadi. O'quvchilar ana shu qonuniyatlarni bosqichma-bosqich o'rganishlari davomida ularning mantiqiy tafakkur qilishlari rivojlanadi, matematik xulosa chiqarish madaniyatlari shakllanadi.

O'quvchilarni biror matematik qonuniyatni ifoda qilmoqchi bo'lgan fikrlarni simvolik tilda to'g'ri ifodalay olishlari va aksincha simvolik tilda ifoda qilingan matematik qonuniyatni o'z ona tillarida ifoda qila olishlariga o'rgatish orqali ularda matematik madaniyat shakllantiriladi.

3. matematika o'qitishning amaliy maqsadi o'z oldiga quyidagi vazifalarni qo'yadi:

a) matematika kursida olingan nazariy bilimlarni kundalik hayotda uchraydigan elementar masalalarni yechishga tatbiq qila olishga o'rgatish. Bunda asosan o'quvchilarda nazariy bilimlarni amaliyotga bog'lay olish imkoniyatlarini tarkib toptirish, ularda turli sonlar va matematik ifodalar ustida amallar bajarish malakalarini shakllantirish va ularni mustahkamlash uchun maxsus tuzilgan amaliy masalalarni hal qilishga o'rgatiladi;

b) matematikani o'qitishda texnik vosita va ko'rgazmali qurollardan foydalanish malakalarini shakllantirish. Bunda o'quvchilarning matematika darslarida texnika vositalaridan, matematik ko'rgazmali qurollar, jadvallar va hisoblash vositalaridan foydalana olish malakalari tarkib toptiriladi;

d) o'quvchilarni mustaqil ravishda matematik bilimlarni egallashga o'rgatish. Bunda asosan o'quvchilarni o'quv darsliklaridan va ilmiy-ommaviy matematik kitoblardan mustaqil o'qib o'rganish malakalarini shakllantirishdan iboratdir.

3-§. Matematika o‘qitish metodikasining boshqa fanlar bilan aloqasi

Ma’lumki, matematika o‘qitish metodikasi fani pedagogika fanining ma’lum bir bo‘limi bo‘lib, u matematika fanini o‘qitish qoidalarini o‘rganish bilan shug‘ullanadi. Matematika o‘qitish metodikasi matematika fanini o‘qitish qonuniyatlarini o‘rganish jarayonida pedagogika, mantiq, psixologiya, matematika, lingvistika va falsafa fanlari bilan uzviy aloqada bo‘ladi. Boshqacha aytganda, maktabda matematika o‘qitish muammolari mantiq, psixologiya, pedagogika, matematika va falsafa fanlari bilan uzviy bog‘liqlikda hal qilinadi. Matematika o‘qitish metodikasining metodologik asosi bilish nazariyasiga asoslangandir.

Matematika metodikasi fani matematik ta’limning maqsadi, mazmuni, formasi, uslubi va uning vositalarini dars jarayoniga tatbiqiy qonuniyatlarini o‘rganib keladi. Matematika fani fizika, chizmachilik, kimyo va astronomiya fanlari bilan ham uzviy aloqada bo‘ladi. Matematika fanining boshqa fanlar bilan uzviy aloqasi quyidagi ikki yo‘l bilan amalga oshiriladi:

1) matematika tizimining butunligini buzmagan holda qo‘shni fanlarning dasturlarini moslashtirish;

2) boshqa fanlarda matematika qonunlarini, formulalarini teoremalarni o‘rganish bilan bog‘liq bo‘lgan materiallardan matematika kursida foydalanish.

Hozirgi vaqtda matematika dasturini boshqa fanlar bilan moslashtirish masalasi ancha muvaffaqqiyatli hal qilingan. Masalan, funksiyalar va ularni grafik tasvirlash haqida fizikada foydalaniladigan ba’zi ma’lumotlarni o‘quvchilar VII sinfdan boshlab o‘rgana boshlaydilar. VIII sinfda beriladigan geometrik yasashlarga doir ko‘p bilimlar chizmachilik fani uchun boy material bo‘ladi, chizmachilikning vazifasi bu bilimlarni turli chizmachilik ishlarini bajartirish yo‘li bilan puxtalashdan iboratdir.

Matematika darslarida boshqa fanlardan foydalanish masalasini dasturda aniq ko‘rsatish qiyin, buni o‘qituvchining o‘zi amalga oshiradi, ya’ni o‘quv materialini rejalashtirishda va darsga tayyorlanish vaqtida e’tiborga olishi kerak. Masalan, tenglamalarni o‘rganish davrida fizik miqdorlar orasidagi bog‘lanishlarni aks ettiradigan tenglamalarni, ya’ni issiqlik balansi tenglamasi, issiqlikdan chiziqli kengayish tenglamasi va shunga o‘xshash tenglamalarni ham yechtirishi mumkin. Dasturning foiz, proporsiya va boshqa boblarini o‘rganishda kimyo va fizika masalalaridan foydalanish maqsadga muvofiq (aralashmalar, quymalar va shunga o'xshashlar), masalan: 1) 20% li eritma hosil qilish uchun eritiladigan moddadan 240 g suvga qancha solish kerak? 2) 5% li 400 g eritmani qaynatib, 200 g ga keltirildi. Endi eritmaning o'tkirligi qancha bo'ladi?

Qo'shni fanlarga doir materiallardan matematika darslarida foydalanish fanlararo uzviy aloqadorlikni yanada mustahkamlaydi.

4-§. Ta'limning isloh qilinishi

O'zbekiston Respublikasi mustaqillikka erishgach, maktab ta'limiga juda ham katta e'tibor berildi. Jumladan 1997-yil 29-avgustda O'zbekiston oliy majlisining IX sessiyasida ta'lim to'g'risidagi qonunga asoslagan kadrlar tayyorlash milliy dasturi qabul qilindi.

Bu qabul qilingan qonunga ko'ra uzluksiz ta'lim tizimining faoliyati davlat ta'lim standartlari asosida, o'z ichiga quyidagi ta'lim turlarini oladi.

Maktabgacha ta'lim, boshlang'ich ta'lim, umumiy o'rta ta'lim, o'rta maxsus kasb-hunar ta'limi, oliy ta'lim, oliy o'quv yurtidan keyingi ta'lim, kadrlar malakasini oshirish va ularni qayta tayyorlash, maktabdan tashqari ta'lim.

Kadrlar tayyorlash milliy modelining o'ziga xos xususiyati mustaqil ravishdagi to'qqiz yillik umumiy o'rta ta'lim hamda uch yillik o'rta maxsus, kasb-hunar ta'limini joriy etishdan iboratdir.

Bu esa umumiy ta'lim dasturlaridan o'rta maxsus, kasb-hunar ta'limi dasturlariga izchil o'tilishini ta'minlaydi. Umumiy ta'lim dasturlari: maktabgacha ta'lim, boshlang'ich ta'lim (I—IV sinflar), umumiy o'rta ta'lim (V—IX sinflar), o'rta maxsus va kasb-hunar ta'limini qamrab oladi.

Maktabgacha ta'lim bola sog'lom, har tomonlama kamol topib shakllanishini ta'minlaydi, unda o'qishga intilish xissini uyg'otadi, uni muntazam bilim olishga tayyorlaydi. Maktabgacha ta'lim bola olti-yetti yoshga yetguncha davlat va nodavlat makgabgacha tarbiya, bolalar muassasalarida hamda oilalarda amalga oshiriladi.

Umumiy o'rta ta'lim I—IX sinflar o'qishidan iborat bo'lgan majburiy ta'limdir. Ta'limning bu turi boshlang'ich sinfni (I—IV sinflar) qamrab oladi hamda o'quvchilarning fikrlashlari bo'yicha muntazam bilim olishlarini, o'quv-ilmiy va umummadaniy bilimlarni, milliy umumbashariy qadriyatlarga asoslangan ma'naviy-ahloqiy fazilatlarni, mehnat ko'nikmalarini hamda kasb tanlashni shakllantiradi. Umumiy o'rta ta'lim tugallanganidan keyin ta'lim fanlari va ular bo'yicha olingan baholar ko'rsatilgan hamda davlat tomonidan tasdiqlangan namunadagi attestat beriladi.

O'rta maxsus, kasb-hunar ta'limi umumiy o'rta ta'lim negizida o'qish muddati uch yil bo'lgan majburiy bo'lgan uzluksiz ta'lim tizimining turidir. O'rta maxsus, kasb-hunar ta'limi yo'nalishi akademik litsey yoki kasb-hunar kolleji o'quvchilar tomonidan ixtiyoriy tanlanadi.

Akademik litsey davlat ta'lim standartlariga muvofiq o'rta maxsus ta'lim beradi. O'quvchilarning imkoniyatlari va qiziqishlarini hisobga olgan holda ularning jadal intelektual rivojlanishi chuqur, sohalashtirilgan kasbga yo'naltirilgan ta'lim olishini ta'minlaydi.

Kasb-hunar kolleji tegishli davlat ta'lim standartlari darajasida o'rta maxsus, kasb-hunar ta'limi beradi, bunda o'quvchilarning kasb hunarga moyilligi, bilim va ko'nikmalarni chuqur rivojlantirish, tanlab olgan kasb-hunar bo'yicha bir yoki bir necha ixtisosni egallash imkonini beradi.

Oliy ta'lim o'rta maxsus, kasb-hunar ta'limi negiziga asoslanadi va ikki bosqichga ega bo'ladi.

1. **Bakalavriat** – mutaxassisliklar yo'nalishi bo'yicha fundamental va amaliy bilim beradigan, ta'lim muddati kamida to'rt yil bo'lgan tayanch oliy ta'limdir. Bakalavrlik dasturi tugagandan so'ng bitiruvchilarga davlat attestatsiyasi yakunlariga binoan kasb bo'yicha «bakalavr» darajasi beriladi.

Magistratura – aniq mutaxassislik bo'yicha fundamental va amaliy bilim beradigan bakalavr negizidagi ta'lim muddati kamida ikki yil bo'lgan oliy ta'limdir. Magistr darajasini beradigan davlat malaka attestatsiyasi magistrlik dasturining nihoyasidir.

Magistrlarga davlat tomonidan tasdiqlangan namunadagi, kasb-hunar faoliyati bilan shug'ullanish huquqini beradigan diplom beriladi.

Oliy o'quv yurtidan keyingi ta'limni oliy o'quv yurtlarida, ilmiy tadqiqot muassasalarida aspirantura, doktorantura, mustaqil tadqiqotchi ko'rinishlaridagi bosqichlar asosida davom ettirish mumkin. Oliy o'quv yurtidan keyingi ta'lim bosqichlari dissertatsiya himoyasi bilan yakunlanadi. Yakuniy davlat attestatsiyalarining natijasiga ko'ra tegishli ravishda fan nomzodi va fan doktori ilmiy darajasi hamda davlat tomonidan tasdiqlangan namunadagi diplomlar beriladi.

Kadrlar malakasini oshirish va qayta tayyorlash mutaxassisliklarning kasb bilimlari va ko'nikmalarini yangilash hamda chuqurlashtirishga qaratilgan. Kadrlar malakasini oshirish va qayta tayyorlash ta'lim muassasalaridagi o'qish natijalariga ko'ra davlat tomonidan tasdiqlangan namunadagi guvohnoma va sertifikat topshiriladi.

Takrorlash uchun savollar

1. *Matematika o'qitish metodikasi fani nimani o'rgatadi va qanday savollarga javob beradi?*
2. *Umumiy metodika bilan xususiy metodikaning farqi nimadan iborat?*
3. *Matematika fanini o'qitishdagi umumta'limiy maqsad nimalardan iborat?*
4. *Matematikani o'qitishdagi tarbiyaviy va amaliy maqsadlarni aytib bering.*
5. *Matematika o'qitish metodikasi fani qaysi fanlar bilan uzviy aloqada bo'ladi?*
6. *Ta'lim to'g'risidagi qonun qachon qabul qilingan?*
7. *Kadrlar tayyorlash milliy dasturı qachon qabul qilingan?*
8. *Kadrlar tayyorlash milliy dasturi necha bosqichdan iborat?*

Tayanch iboralar

Matematika, metodika, umumiy metodika, xususiy metodika, umumta'limiy maqsad, tarbıyaviy maqsad, amaliy maqsad, ta'lim haqidagi qonun, kadrlar tayyorlash milliy dasturi, sifat bosqichi, uzluksiz ta'lim, maktabgacha ta'lim, boshlang'ich ta'lim, o'rta umumiy ta'lim, akademik litsey, kasb-hunar kolleji, oliy ta'lim, bakalavr, magistr, aspirantura, doktarantura, malaka oshirish.

II bob
MATEMATIKA DARSLARIDA BILISHNING TURLARI VA XULOSA CHIQARISH METODLARI

1-§. Matematik tushuncha

Ta'lim deganda o'qituvchi bilan o'quvchilar orasidagi ongli va maqsadga tomon yo'naltirilgan bilishga doir faoliyat tushuniladi. Har qanday ta'lim o'z oldiga ikkita maqsadni qo'yadi:

1) o'quvchilarga dastur asosida o'rganilishi lozim bo'lgan zarur bilimlar sistemasini berish;

2) matematik bilimlarni berish orqali o'quvchilarning mantiqiy fikrlash qobiliyatlarini shakllantirish.

Ta'lim jarayonidagi ana shu ikki maqsad amalga oshishi uchun o'qituvchi har bir o'rgatilayotgan tushunchani psixologik, pedagogik va didaktik qonuniyatlar asosida tushuntirishi kerak. Buning natijasida o'quvchilar ongida **bilish** deb ataluvchi psixologik jarayon hosil bo'ladi.

Bizga falsafa kursidan ma'lumki, bilish jarayoni «jonli mushohadadan abstrakt tafakkurga va undan amaliyotga demakdir». Bundan ko'rinadiki, bilish jarayoni tafakkur qilishga bog'liq ekan. «Tafakkur — inson ongida obyektiv olamning aktiv aks etishi demakdir» (Yu.M. Kolyagin. «Matematika o'qitish metodikasi, M., 1980-y, 57-bet).

Psixologik nuqtayi nazardan qaraganda bilish jarayoni ikki xil bo'ladi:

1) Hissiy bilish (sezgi, idrok va tasavvur).

Insonning hissiy bilishi uning sezgi va tasavvurlarida o'z ifodasini topadi. Inson sezgi a'zolari vositasida real dunyo bilan o'zaro aloqada bo'ladi. Bilish jarayonida sezgilar bilan birga idrok ham ishtirok etadi. Sezgilar natijasida obyektiv olamning subyektiv obrazi hosil bo'ladi, ana shu subyektiv obrazning inson ongida butunicha aks etishi ***idrok*** deb ataladi.

Tashqi olamdagi narsa va hodisalar inson miya po'stlog'ida sezish va idrok qilish orqali ma'lum bir iz qoldiradi. Oradan ma'lum bir vaqt o'tgach, ana shu izlar jadallashishi va biror narsa yoki hodisaning obyektiv obrazi sifatida qayta tiklanishi mumkin. Ana shu obyektiv olamning obyektiv obrazining ma'lum vaqt o'tgandan keyin qayta tiklanish jarayoni tasavvur deb ataladi.

2) Mantiqiy bilish (tushuncha, hukm va xulosa).

Har qanday mantiqiy bilish hissiy bilish orqali amalga oshadi, shuning uchun ham har bir o'rganilayotgan matematik obyektdagi narsalar seziladi, abstrakt nuqtayi nazardan idrok va tasavvur qilinadi, so'ngra ana shu o'rganilayotgan obyektdagi narsa to'g'risida ma'lum bir matematik tushuncha hosil bo'ladi.

Ta'rif. *Matematik obyektdagi narsalarning asosiy xossalarini aks ettiruvchi tafakkur formasiga matematik tushuncha deyiladi.*

Har bir matematik tushuncha o'zining ikki tomoni, ya'ni mazmuni va hajmi bilan xarakterlanadi.

Ta'rif. *Tushunchaning mazmuni deb, ana shu tushunchani ifodalovchi asosiy xossalar to'plamiga aytiladi.*

Masalan, to'g'ri to'rtburchak tushunchasini olaylik. To'g'ri to'rtburchak tushunchasining mazmuni quyidagi asosiy xossalar to'plamidan iboratdir:

1) to'g'ri to'rtburchak diagonali uni ikkita uchburchakka ajratadi.

2) ichki qarama-qarshi burchaklarining yig'indisi 180° ga teng.

3) diagonallari bir nuqtada kesishadi va shu nuqtada teng ikkiga bo'linadi.

Ta'rif. *Tushunchaning hajmi deb, ana shu tushunchaga kirgan barcha obyektlar to'plamiga aytiladi.*

Masalan, to'rtburchak tushunchasining hajmi shu to'rtburchak tushunchasiga kirgan barcha to'rtburchak turlaridan, ya'ni parallelogramm, kvadrat, romb va trapetsiyadan iborat bo'ladi. Bundan to'rtburchak tushunchasining hajmi tomonlari uzunliklarining kattaligi turlicha bo'lgan barcha katta-kichik to'rtburchaklar tashkil qilishi ko'rinadi.

Bizga hajm jihatidan keng va mazmun jihatidan tor bo'lgan tushunchani jins tushunchasi, aksincha esa hajmi tor va mazmuni keng bo'lgan tushunchani tur tushunchasi deb yuritilishi psixologiya fanidan ma'lum.

1-misol. Akslantirish tushunchasini olaylik. Bu tushunchadan ikkita, ya'ni qaytuvchi va qaytmaydigan akslantirish tushunchalari kelib chiqadi. Bu yerda akslantirish tushunchasi qaytuvchi va qaytmaydigan akslantirish tushunchalariga nisbatan jins tushunchasi, qaytuvchi va qaytmaydigan akslantirishlar esa akslantirish tushunchasiga nisbatan tur tushunchalari bo'ladi. Bu mulohazalardan jins tushunchasi tur tushunchalariga nisbatan hajm jihatidan keng va mazmun jihatidan tor tushuncha ekani ko'rinadi.

2- misol. Ko'pburchak tushunchasini olaylik. Bu tushunchadan ikkita qabariq va botiq ko'pburchak tushunchalari kelib chiqadi. Ko'pburchak tushunchasi bu tushunchalariga nisbatan jins tushunchasi deb yuritiladi, chunki uning hajmi qabariq va botiq ko'pburchaklar hajmlaridan kattadir.

Qabariq va botiq ko'pburchaklar esa ko'pburchak tushunchasiga nisbatan tur tushunchalari deb yuritiladi, chunki ulardan har birining hajmi ko'pburchak tushunchasining hajmidan kichik, ammo mazmunlari ko'pburchak tushunchasining mazmunidan katta.

2-§. Matematik tushunchalarning ta'riflash metodikasi

Har bir fanda bo'lgani kabi matematika fanida ham ta'riflanadigan va ta'riflanmaydigan tushunchalar mavjud.

Maktab matematika kursida, shartli ravishda, ta'riflanmaydigan eng sodda tushunchalar qabul qilinadi. Jumladan, arifmetika kursida son tushunchasi va qo'shish amali, geometriya kursida esa tekislik, nuqta, masofa va to'g'ri chiziq tushunchalari ta'riflanmaydigan tushunchalardir. Bu tushunchalar yordamida boshqa matematik tushunchalar ta'riflanadi.

Ta'rif degan so'zning ma'nosi shundan iboratki, bunda qaralayotgan tushunchalarni boshqalaridan farqlashga, fanga kiritilgan yangi atama mazmunini oydinlashtirishga imkon beruvchi mantiqiy usul tushuniladi.

Tushunchaning ta'rifi ta'riflanuvchi tushuncha bilan ta'riflovchi tushunchalar orasidagi munosabatdan hosil bo'ladi.

Tushunchaning ta'rifi inglizcha definitsiya (*definito*) so'zidan olingan bo'lib, «chegara» degan yoki «biror narsaning oxiri» degan ma'noni bildiradi. Professor J.Ikromov o'zining «**Maktab matematika tili**» nomli kitobida tushunchalarning ta'rifini quyidagi turlarga ajratadi:

1) Real ta'rif. Bunda qaralayotgan tushunchaning shu guruhdagi tushunchalardan farqi ko'rsatib beriladi. Bunda ta'riflovchi va ta'riflanuvchi tushunchalar hajmlarining teng bo'lishi muhim rol o'ynaydi. Masalan, «Aylana deb tekislikning biror nuqtasidan masofasi berilgan masofadan katta bo'lmagan masofada yotuvchi nuqtalar to'plamiga aytiladi». Bu yerda ta'riflanuvchi tushuncha aylana tushunchasidir, ta'riflovchi tushunchalar esa tekislik, nuqta, masofa tushunchalaridir.

2) Klassifikatsion ta'rif. Bunda ta'riflanayotgan tushunchaning jins tushunchasi va uning tur jihatidan farqi ko'rsatilgan bo'ladi. Masalan, «kvadrat — barcha tomonlari teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchakdir». Bu ta'rifda «to'g'ri to'rtburchak» tushunchasi «kvadrat»ning jins tushunchasi, «barcha tomonlari teng» esa tur jihatidan farqini ifoda qiladi.

3) Genetik ta'rif yoki induktiv ta'rif. Bunda asosan tushunchaning hosil bo'lish jarayoni ko'rsatiladi. Boshqacha aytganda, tushunchaning hosil bo'lish jarayonini ko'rsatuvchi ta'rif genetik ta'rif deyiladi.

Bizga psixologiya kursidan ma'lumki, genetika so'zi grekcha genesis so'zidan olingan bo'lib «kelib chiqish» yoki «manba» degan ma'noni bildiradi.

1) To'g'ri burchakli uchburchakning bir kateti atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jismni konus deyiladi.

2) To'g'ri burchakli trapetsiyaning balandligi atrofidan aylanishidan hosil bo'lgan jismni kesik konus deyiladi.

3) Doiraning diametri atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jism shar deyiladi.

Yuqoridagilardan ko'rinadiki, tushunchalarni ta'riflashda har bir tushunchaning mazmuni beriladi, bu degan so'z tushunchaning asosiy alomatlari yoki muhim belgilarini sanab ko'rsatish demakdir. Demak, ta'rifda faqat ta'riflanadigan tushunchani boshqa turdagi tushunchalardan ajratib turadigan muhim belgilarigina ifodalanadi. Maktab matematika kursida tushunchalarning ta'rifi ikki usul bilan tuziladi:

1) Berilgan tushunchaning hajmiga kiruvchi barcha obyektlar to'plamiga asoslaniladi. Masalan, tekislikning (masofalarni o'zgartmagan holda) o'z-o'ziga akslanishi siljitish deyiladi. Bu yerda o'q va markaziy simmetriya, parallel ko'chirish va nuqta atrofida burish tushunchalari siljitish tushunchasining obyektiga kiruvchi tushunchalardir.

2) Berilgan tushunchalarning aniqlovchi alomatlar to'plamiga asoslaniladi. Bunday ta'rifni tuzishda tushunchaning barcha muhim alomatlari sanab o'tilmaydi, ammo ular tushunchaning mazmunini ochib berish uchun yetarli bo'lishi kerak. Masalan, parallelogrammning muhim alomatlari quyidagilardan iborat:

a) to'rtburchak;

b) qarama-qarshi tomonlari o'zaro teng va parallel;

d) diagonallari kesishish nuqtasida teng ikkiga bo'linadi;

e) qarama-qarshi burchaklari teng.

Parallelogrammni ta'riflashda a) va b) alomatlar orqali quyidagi ta'rifni tuzish mumkin:

«Qarama-qarshi tomonlari o'zaro parallel va teng bo'lgan to'rtburchak parallelogramm deyiladi».

Endi a) va d) alomatlar orqali ta'rif tuzaylik: «diagonallari kesishib, kesishish nuqtasida teng ikkiga bo'linuvchi to'rtburchak parallelogramm deyiladi».

Aytilganlardan ma'lum bo'ladiki, tushunchani ta'riflashda tanlanadigan muhim alomatlar soni yetarlicha bo'lgandagina ta'riflanayotgan tushuncha haqidagi ta'rif to'g'ri chiqadi.

3-§. Matematik tushunchalarni kiritish metodikasi

Maktab matematika kursida matematik tushunchalar ikki xil usulda kiritiladi:

1) Aniq – induktiv metod. Bunda o‘quvchilar avval o‘qituvchining topshiriqlarini bajargan holda o‘rganilayotgan tushunchaning umumiy xossalarini aniqlaydilar, so‘ngra o‘qituvchi rahbarligida ta’rifni mustaqil holda tuzishga harakat qiladilar. Yangi tushuncha kiritishning bu yo‘li ayniqsa quyi sinflarda o‘z samarasini beradi.

Bundan tashqari, aniq induktiv yo‘l orqali tushunchalarni kiritish jarayonida muammoli vaziyatlar hosil bo‘ladi, buning natijasida o‘quvchilarda mustaqil fikrlash qobiliyatlari shakllanadi. Fikrimizning dalili sifatida 6-sinfda o‘rgatiladigan «parallel to‘g‘ri chiziqlar» tushunchasini aniq-induktiv metod orqali kiritish usulini ko‘rib o‘taylik.

O‘rganish jarayonining bosqichlari	Tushuncha shakllanishining psixologik bosqichlari	O‘rganilayotgan tushunchaning aniq modeli
1. Parallel to‘g‘ri chiziqlar tushunchasiga mos keluvchi misollarni kundalik hayotimizdan olish	Sezish va idrok qilish	Chizg‘ichning ikki qirg‘og‘idagi chiziqlar. Doskaning qarama-qarshi tomonlaridagi chiziqlar
2. Ana shu tushunchani ifodalovchi asosiy va asosiy bo‘lmagan xossalarini aniqlash	Idrok qilishdan tasavvurga o‘tish	1) To‘g‘ri chiziqlarning gorizontal joylashishi (asosiy bo‘lmagan xossa) 2) Bu to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro bir xil uzoqlikda joylashgan (asosiy xossa) 3) To‘g‘ri chiziqlar umumiy nuqtaga ega emas (asosiy xossa) 4) To‘g‘ri chiziqlarni ikki tomonga cheksiz davom ettirish mumkin (asosiy bo‘lmagan xossa)
3. Agar mavjud bo‘lsa, bu tushunchaning muhim holatlari ham qaraladi		Ustma-ust tushuvchi to‘g‘ri chiziqlar ham bir-biridan bir xil masofada joylashgan bo‘ladi (masofa qiymati 0 ga teng)
4. Parallel so‘zining mazmuni		Parallel so‘zi grekcha *paralelos* so‘z bo‘lib, yonma-yon boruvchi degan ma’noni bildiradi

5. Parallel to'g'ri chiziqlar tushunchasining asosiy xossasini ajratish va uni ta'riflash	Tasavvurdan tushunchani hosil qilishga o'tish	1) Bir-biridan bir xil uzoqlikdagi masofada turuvchi to'g'ri chiziqlar jufti parallel to'g'ri chiziqlar deyiladi (aniq bo'lmagan ta'rif, chunki biror burchakning tomonlari ham shu burchak bissektrisasiga nisbatan bir xil uzoqlikda joylashgan bo'ladi) 2) Parallel to'g'ri chiziqlar umumiy nuqtaga ega bo'lmaydi (to'la bo'lmagan ta'rif, chunki, kesishmaydigan to'g'ri chiziqlar umumiy nuqtaga ega bo'lmaydi). 3) Ta'rif. Bir tekislikda yotib umumiy nuqtaga ega bo'lmagan yoki ustma-ust tushuvchi ikki to'g'ri chiziq parallel to'g'ri chiziqlar deyiladi.
6. Parallel to'g'ri chiziqlar tushunchasini aniq misollarda ko'rsatish	Tushunchaning hosil bo'lishi	1) O'qituvchi sinf xonasining o'zaro parallel bo'lgan qirralarni ko'rsatadi.
7. Parrallel to'g'ri chiziqlarni simvolik belgilash	Tushunchani o'zlashtirish	2) Kubning modelini ko'rsatib, uning mos qirralaridan o'zaro ayqash bo'lgan to'g'ri chiziqlarni ko'rsatadi. Agar bizga a va b to'g'ri chiziqlar berilgan bo'lib, ular o'zaro parallel bo'lsa, uni biz $a \| b$ kabi belgilaymiz.

4-§. Matematik tushunchalarni kiritishning abstrakt-deduktiv metodi

Bunda o'rganiladigan matematik tushuncha uchun ta'rif tayyor ko'rinishda oldindan aniq misol va masalalar yordamida tushuntirilmasdan kiritiladi. Masalan, 7-sinfda o'tiladigan to'la kvadrat tenglama tushunchasi abstrakt-deduktiv metod orqali kiritiladi.

1. Kvadrat tenglama tushunchasiga ta'rif beriladi.

Ta'rif. $ax^2+bx+c=0$ ko'rinishidagi tenglamalar to'la kvadrat tenglama deyiladi. Bunda x — o'zgaruvchi, a, b, c — ixtiyoriy o'zgarmas sonlar, $a > 1$.

2. Kvadrat tenglamaning xususiy hollari ko'rib chiqiladi. Buni jadval tarzida bunday ifodalash mumkin.

To‘la kvadrat tenglama

$ax^2 + bx + c = 0$

Keltirilgan kvadrat tenglama | Chala kvadrat tenglama

$x^2 + px + q = 0$ | $(b=0) \vee (c=0) \vee (b=0 \wedge c=0)$

$ax^2 + c = 0$ | $ax^2 + bx = 0$ | $ax^2 = 0$

3. Hosil qilingan keltirilgan va chala kvadrat tenglamalarga aniq misollar keltiriladi. Masalan,

$$2x^2 - 3x - 4 = 0,\ x^2 - 5x - 6 = 0,$$

$$3x^2 + 5x = 0,\ 2x^2 + 7x = 0,\ 5x^2 = 0,\ ...$$

4. Kvadrat tenglama tatbiqiga doir hayotiy misollar keltirish kerak.

Masalan, $S = \frac{gt^2}{2}$ formula fizika kursidan bizga ma’lum, bu tenglamani $gt^2 - 2s = 0$ ko‘rinishidagi chala kvadrat tenglama holiga keltirib, so‘ngra yechiladi.

5. Kvadrat tenglamaning ildizlarini hisoblash formulasini keltirib chiqarish.

1- usul. $ax^2 + bx + c = 0$ tenglama ildizlarini toping. Buning uchun quyidagi ayniy almashtirishlar bajariladi:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = 0; \qquad a \neq 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2};$$

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = -\frac{b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

2- usul.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx = -c \mid \cdot 4a,$$

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac \mid + b^2,$$

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac,$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

$$2ax_{1,2} + b = \pm\sqrt{b \ \ -4ac}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Agar $ax^2+bx+c=0$ da $a=1$ bo'lsa, $x^2+bx+c=0$ ko'rinishdagi keltirilgan kvadrat tenglama hosil bo'lib, uning yechimlari quyidagicha bo'ladi:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4c}}{2} = \frac{-b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}.$$

Agar $b = p$; $c = q$ desak, $x^2+px+q=0$ bo'ladi, uning yechimlari

$$x_1 = \frac{-p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \text{ va } x_2 = \frac{-p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \text{ bo'ladi.}$$

3- usul.

$$x^2 + px + q = 0 \qquad (1)$$

$b^2 = q$; $\quad 2ab = p\quad$ desak, $b = \pm\sqrt{q}$, $a = \pm\frac{p}{2\sqrt{q}}$

bularni (1) ga qo'ysak, u quyidagi ko'rinishni oladi:

$$x^2 + 2abx + b^2 = 0 \qquad (2)$$

(2) *ga* a^2x^2 ni qo'shsak va ayirsak $x^2+2abx+b^2+a^2x^2-a^2x^2=0$ bo'ladi, $a^2x^2+2abx+b^2-a^2x^2+x^2=0$ yoki $(ax+b)^2-a^2x^2+x^2=0$ belgilashga ko'ra

$b = \pm\sqrt{q}$; $a = \pm\dfrac{p}{2\sqrt{q}}$ edi, shuning uchun

$$\left(\frac{px}{2\sqrt{q}} + \sqrt{q}\right)^2 - \frac{p^2}{4q}x^2 + x^2 = 0; \qquad px + 2q = \pm x\sqrt{p^2 - 4q};$$

$$(px + 2q)^2 - p^2x^2 + 4qx^2 = 0; \qquad 2q = x\left(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}\right);$$

$$x_{1,2} = \frac{2q}{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}.$$

1- misol. $x^2 - 3x - 4 = 0;$ $p = -3;$ $q = -4$

$$x_{1,2} = \frac{-p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2};$$

$$x_1 = 4; \quad x_2 = -1.$$

$$x_{1,2} = \frac{2q}{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}} = \frac{2 \cdot (-4)}{3 \pm \sqrt{9 + 16}} = \frac{-8}{3 \pm 5};$$

$$x_1 = \frac{-8}{-2} = 4; \quad x_2 = \frac{-8}{8} = -1.$$

2- misol. $x^2 - 5x - 6 = 0;$
$p = -5;$ $q = -6$

$$x_{1,2} = \frac{2q}{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}} = \frac{2 \cdot (-6)}{5 \pm \sqrt{25 + 24}} = -\frac{-12}{5 \pm 7};$$

$$x_1 = -\frac{-12}{12} = -1; \quad x_2 = \frac{-12}{-2} = 6.$$

3- misol. $2x^2-5=0$ bo‘lsa, $(2x^2=5)$ $\Rightarrow \left(x^2 = \frac{5}{2}\right) \Rightarrow$ $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$.

4- misol. $2x^2 - 3x = 0$ bo‘lsa, $[x(2x - 3) = 0])$ $\Rightarrow \begin{bmatrix} E^2 = 0 \\ E^2 = \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ bo‘ladi.

5- misol. $2x^2 = 0$ bo‘lsa, $x_{1,2} = 0$ bo‘ladi.

5-§. Matematik hukm

Matematik hukm mantiqiy bilish formalaridan biri bo'lib, unga quyidagicha ta'rif berilgan: *«Tushunchalar asosida hosil qilingan matematik fikrni tasdiqlash yoki inkor qilishga matematik hukm deyiladi»*. Bu ta'rifdan ko'rinadiki, hukmning xarakterli xossasi aytilgan matematik fikrning to'g'riligini tasdiqlash yoki noto'g'riligini inkor qilishdan iborat ekan.

Matematik tushunchalarni tasdiqlash ma'nosidagi hukmga quyidagicha misollar keltirish mumkin:

1. Paralellogrammning qarama-qarshi tomonlari o'zaro parallel va teng.
2. Har qanday turdagi uchburchak uchta uchga ega.
3. Uchburchak ichki burchaklarning yig'indisi 180° ga teng.
4. Ko'pburchak ichki burchaklarining yig'indisi $2d(n-2)$ ga teng.

Matematik tushunchalarni inkor qilish ma'nosidagi hukmlarga quyidagi misollarni keltirish mumkin:

1. Har qanday uchburchakda ikki tomon uzunliklarining yig'indisi uchinchi tomon uzunligidan kichik emas.
2. Piramidadagi uch yoqli burchaklarning yig'indisi hech qachon o'zgarmas son bo'la olmaydi.
3. Har qanday to'rtburchakda ichki burchaklar yig'indisi 360° dan katta emas.

Bundan kelib chiqadiki, har qanday matematik gap ham matematik hukm bo'la olmas ekan. Masalan, «*ABCD* to'rtburchak paralellogramm bo'la oladimi?» «Ixtiyoriy uchburchak ichki burchaklarining yig'indisi 180° ga teng bo'la oladimi?» Keltirilgan ikkala misolda ham inkor va tasdiq ma'nosi yo'q, shuning uchun ular matematik hukmga misol bo'la olmaydi.

Matematik hukm uch xil bo'ladi:

1. Birlik hukm. 2. Xususiy hukm. 3. Umumiy hukm.

Matematikani o'qitish jarayonida yuqoridagi hukmlarning uchala turi uzviy aloqada bo'ladi. Boshqacha aytganda, birlik hukmning natijasi sifatida xususiy hukm hosil qilinadi, xususiy hukmning natijasi sifatida esa umumiy hukm hosil qilinadi. Fikrlarimizning dalili sifatida quyidagi misolni ko'raylik. 1) Birlik hukmlar:

a) Aylana to'g'ri chiziq bilan faqat ikki nuqtada kesishadi.
b) Ellips to'g'ri chiziq bilan faqat ikki nuqtada kesishadi.
d) Giperbola to'g'ri chiziq bilan faqat ikki nuqtada kesishadi.

c) Parabola to‘g‘ri chiziq bilan faqat ikki nuqtada kesishadi.

2) Xususiy hukm: «Aylana, ellips, giperbola va parabolalar ikkinchi tartibli egri chiziqlar hosil qiladi». Yuqoridagi birlik va xususiy hukmlarga asoslanib, quyidagi umumiy hukmni hosil qilamiz.

3) Umumiy hukm: «Ikkinchi tartibli egri chiziqlar to‘g‘ri chiziq bilan faqat ikki nuqtada kesishadi».

6-§. Matematik xulosa

Matematik xulosa ham mantiqiy tafakkur qilish shakllaridan biri. Matematik xulosaga bunday ta’rif berilgan:

«Ikkita qat’iy hukmdan hosil qilingan uchinchi natijaviy hukmga xulosa deyiladi».

Misol. 1-hukm: to‘rtburchakning diagonali uni ikkita uchburchakka ajratadi.

2-hukm: har bir uchburchak ichki burchaklarining yig‘indisi 180° ga teng.

3-hukm: demak, to‘rtburchak ichki burchaklarining yig‘indisi 360° ga teng (xulosa bo‘ladi).

Maktab matematika kursida xulosalarning uchta turi, ya’ni induktiv, deduktiv va analogik xulosalar o‘rganiladi.

Ta’rif. *Ayrim yoki xususuy ma’lumotlarga tayanib umumiy xulosa chiqarishni induksiya deyiladi.*

Induksiya uch xil bo‘ladi: chala induksiya, to‘la induksiya va matematik induksiya. Chala induksiya metodi orqali chiqarilgan xulosa ko‘pgina hollarda to‘g‘ri, ammo ayrim hollarda noto‘g‘ri bo‘ladi.

1-misol. Fermaning mashhur teoremasi bo‘yicha $(2^{2^n}+1)$ ko‘rinishdagi sonlar $n = [0,1,2,3,4, ...]$ bo‘lganda 3, 5, 17, 257, 65537, ... kabi tub sonlardan iborat edi. Shuning uchun Ferma umumiy holda ko‘rinishdagi barcha sonlar n ning ixtiyoriy qiymatlarida ham tub sonlar bo‘ladi, deb umumiy xulosa chiqargan. XVIII asrda L.Eyler Ferma teoremasini tekshirib, uning qonuniyati: $n=5$ bo‘lganda buzilishini, ya’ni hosil bo‘lgan son murakkab son bo‘lishini aniqlagan:

$$(2^{2^5}+1) = 4294967297 = 641 \cdot 6700417.$$

Bu degan so‘z $(2^{2^5}+1)$ ifoda 641 ga bo‘linadi, bundan $(2^{2^5}+1)$ tub son bo‘lmay, balki murakkab son ekanligi kelib chiqadi. Demak, chala induksiya metodi orqali Fermaning $\forall n \in N$ bo‘lganda $(2^{2^n}+1)$ ko‘rinishdagi sonlar tub bo‘ladi, degan xulosasi noto‘g‘ri ekan.

Induksiya metodi orqali xulosa chiqarish esa biror matematık qonuniyat uch hol uchun o‘rinli bo‘lganidan n-hol uchun o‘rinli deb qabul qilinadi.

1- misol.

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)} \text{ yig‘indisini hisoblang:}$$

$$S_1=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2},$$

$$S_2=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{3+1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3},$$

$$S_3=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{6+2+1}{12}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}.$$

... ...

Bu uchta xususiy yig‘indiga asoslanib, umumiy xulosa yoziladi:

$$S_n=\frac{n}{n+1}.$$

Maktab algebra kursida daraja va logarifmlar xossalari o‘tilgandan so‘ng ana shu xossalarga asoslanib o‘quvchilar induktiv xulosa chiqarish yordamida daraja va logarifmlarning umumlashgan xossasini chiqarishlari mumkin.

2- misol.

$$a^{n_1}\cdot a^{n_2}=a^{n_1+n_2},$$

$$a^{n_1}\cdot a^{n_2}\cdot a^{n_3}=a^{n_1+n_2+n_3},$$

$$a^{n_1}\cdot a^{n_2}\cdot a^{n_3}\cdot a^{n_4}=a^{n_1+n_2+n_3+n_4},$$

... ...

$$a^{n_1}\cdot a^{n_2}\cdot a^{n_3}\cdot\ldots\cdot a^{n_k}=a^{n_1+n_2+n_3+\ldots+n_k}.$$

3- misol.

$$lg(x_1\cdot x_2)=lgx_1+lgx_2 \quad \text{agar} \quad x_1>0 \wedge x_2>0 \quad \text{bo‘lsa,}$$

$$lg(x_1\cdot x_2\cdot x_3)=lgx_1+lgx_2+lgx_3 \quad \text{agar} \quad x_1>0,\ x_2>0,\ x_3>0 \quad \text{bo‘lsa,}$$

$$lg(x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4)=lgx_1+lgx_2+lgx_3+lgx_4 \quad \text{agar} \quad (x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4)>0 \text{ bo‘lsa,}$$

... ...

$$lg(x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_n)=$$

$$=lgx_1+lgx_2+lgx_3+\ldots+lgx_n \quad \text{agar} \quad (x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_n)>0 \text{ bo‘lsa.}$$

Matematik induksiya metodi. Bu metodda biror matematik qonuniyat $n = 1$ hol uchun o'rinli bo'lsa, uni $n = k$ hol uchun o'rinli deb qabul qilib, so'ngra $n = k + 1$ hol uchun o'rinli ekanligini ko'rsatiladi.

1-misol. $S_n=1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ yig'indining o'rinli ekanligini matematik induksiya metodi orqali ko'rsatilsin, bunda $n \in N$.

1. Agar $n = 1$ bo'lsa, $S_1=\frac{1(1+1)}{2}=1$.

2. Agar $n = k$ bo'lsa, $S_k=1+2+3+...+k=\frac{k(k+1)}{2}$.

3. Agar $n=k+1$ bo'lsa,

$S_{k+1}=1+2+3+...+k+(k+1)=\frac{(k+2)(k+1)}{2}$ ekanligi isbotlanadi.

Isboti. $S_{k+1}=S_k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=$

$\frac{(k+2)(k+1)}{2}$.

Demak, $S_n=1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ yig'indisining hisoblash formulası to'g'ri ekan.

2-misol. $S_n=1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n \in N$.

1. Agar $n = 1$ bo'lsa, $S_1=\frac{1\ (1+1)(2\cdot 1+1)}{6}=1$.

2. Agar $n = k$ bo'lsa, $S_k=\frac{k\cdot(k+1)(2k+1)}{6}$.

3. Agar $n=k+1$ bo'lsa, $S_{k+1}=1^2+2^2+3^3+...+(k+1)^2=$

$=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$ bo'lishligini isbotlang.

Isboti. $S_{k+1}=S_k+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=$

$$= \frac{k+1}{6}[k(2k+1)+6(k+1)] = \frac{k+1}{6}\cdot[2k^2+7k+6) =$$

$$= \frac{2(k+1)(k+2)\left(k+\frac{3}{2}\right)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

3- misol. $S_n = 1^3+2^3+3^3+...+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, $n \in N$

1. Agar $n = 1$ bo'lsa, $S_1 = \frac{1\cdot(1+1)^2}{4} = 1.$

2. Agar $n = k$ bo'lsa, $S_k = \frac{k^2(k+1)^2}{4} = 1.$

3. Agar $n = k+1$ bo'lsa, $S_k = 1^3+2^3+3^3+...k^3+(k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$

bo'lishligini isbotlang.

Isboti. $S_{k+1} = S_k + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 =$

$$= (k+1)^2\left(\frac{k^2}{4}+k+1\right) = \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

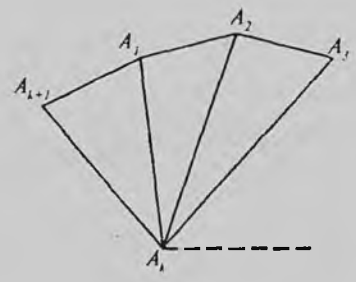
T e o r e m a. *Qabariq n burchak ichki burchaklarining yig'indisi 180° (n—2) ga teng.*

Bu teoremani matematik induksiya metodi bilan isbotlang (1-chizma).

1. $n = 3$ bo'lganda $S_3 = 180°$.

2. $n = k$ bo'lganda $S_k = 180°(k-2)$ bo'ladi.

Agar $n = k$ uchun $S_k = 180°\ (k-2)$ bo'lca, $n = k + 1$ uchun $S_{k+1} = 180°\ [(k+1)-2]$ bo'lishini isbotlang.



1-chizma.

Bu holni isbot qilish uchun $(k + 1)$ burchakli qabariq ko'pburchak olinadi. A_1A_k diagonal berilgan ko'pburchakni k

burchakli qabariq $A_1A_2A_3...A_k$ ko'pburchakka va $A_1A_kA_{k+1}$ uchburchakka ajratadi, u holda $S_{k+1}=S_k+S_3$ tenglik o'rinli bo'ladi:

$$S_{k+1}=180°(k-2)+180°=180°[(k-2)+1]=180°[(k+1)-2].$$

Demak, teorema har qanday qabariq n burchak uchun ham o'rinli ekan.

4- misol. Quyidagi tengsizlikni matematik induksiya metodi bilan isbotlang:

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}.$$

Isboti. $n = 1$, bo'lganda $1 = 1$ tenglik o'rinli.

$n = 2$ bo'lganda $1+\frac{1}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}$ tengsizlik o'rinli.

Endi faraz qilaylik, berilgan tengsizlik $n = k$ uchun o'rinli, ya'ni $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k}$ bo'lsin, uning $n=k+1$ hol uchun o'rinli ekani ko'rsatiladi:

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}.$$

Bu tengsizlikni kuchaytirish uchun $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...\frac{1}{\sqrt{k}}$ o'rniga $\sqrt{k}$ qo'yiladi, u holda $\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$ (1) bo'ladi. Bu tengsizlikni o'rinli ekani ko'rsatilsa, berilgan tengsizlik isbotlangan bo'ladi.

(1) ning har ikki tomoni kvadratga ko'tarilsa, u holda quyidagi tengsizlik hosil bo'ladi:

$$k+\frac{1}{k+1}+\frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}}>k+1, \qquad \frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}}+\frac{k}{k+1}.$$

Bu tengsizlikning har ikkala tomonini $\sqrt{\frac{k}{k+1}}$ ga bo'linsa, $2>\sqrt{\frac{k}{k+1}}$ tengsizlik k ning k-1 dan boshqa qiymatlaridan o'rinli, shuning uchun

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$$

tengsizlik n ning har qanday qiymatida ham o'rinli.

5- misol. $(2n - 1)! > n!$ tengsizlikni matematik induksiya metodi bilan isbotlang.

Isboti. Ma'lumki. $(2n-1)! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$.

1. $n = 1$ bo'lganda $1 = 1$ tenglik o'rinli.

$n = 2$ bo'lganda $3 > 2$ sonli tengsizlik hosil bo'ladi.

2. Endi berilgan tengsizlik $n = k$ hol uchun o'rinli, ya'ni $(2k-1)! > k!$ deb faraz qilaylik, buning $n = k + 1$ hol uchun o'rinli ekanini ko'rsatamiz:

$$\{[2(k + 1) - 1]! > (k + 1)!\} \to (2k + 1)! > (k + 1)!$$

$(2k-1)! > k!$ tengsizlikning har ikki tomonini $k+1$ ga ko'paytiriladi u holda

$k!(k+1) < (2k-1)!(k+1) < (2k-1)!(2k+1) = (2k+1)!$ ifoda hosil bo'ladi. Bundan esa $(k+1)! < (2k + 1)!$ Shuning uchun tengsizlik n ning har qanday qiymatlarida o'rinli.

Tengsizliklarni isbotlang:

1. $\left(\frac{n}{2}\right) > n!$

2. $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \ldots \frac{2n-1}{2n} \le \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

Ta'rif. *Umumiy ma'lumotlarga tayanib ayrim yoki xususiy xulosa chiqarish deduksiya deyiladi.*

Misollar 1. $x^2-3x-4=0$ tenglamaning diskriminantini hisoblab, uning yechimlari borligini ko'rsating. $D=9+16=25$. $D>0$. Ma'lumki, kvadrat tenglamani yechish haqidagi qoidaga ko'ra uning diskriminanti musbat bo'lsa, u ikkita haqiqiy har xil yechimga ega edi, shuning uchun $x^2-3x-4=0$ tenglama ham ikkita $x_1 = 4$ va $x_2 = -1$ yechimlarga ega.

2. $\sqrt{81 \cdot 0{,}09}$ ifodaning qiymatini hisoblang. Bu ifodaning qiymatini hisoblash uchun maktab algebra kursidan umumiy qonuniyatni o'z ichiga oluvchi quyidagi teoremadan foydalaniladi.

Teorema. $a \ge 0$ va $b \ge 0$ *bo'lganda* $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ *bo'ladi.*

Shuning uchun quyidagi xulosani hosil qilamiz:

$$\sqrt{81 \cdot 0{,}09} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{0{,}09} = 9 \cdot 0{,}3 = 2{,}7.$$

3. Maktab geometriya kursida kosinuslar teoremasining analitik ifodasi bunday:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\hat{C}. \qquad (1)$$

Agar (1) da $c=90°$ bo'lsa, $\cos 90°=0$, shuning uchun $c^2=a^2+b^2$ (2) bo'ladi. Bizga ma'lumki, (2) Pifagor teoremasining ifodasidir.

Xulosa chiqarish metodlaridan yana biri bu analogiyadir.

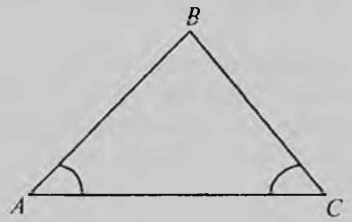
Ta'rif. *O'xshashlikka asoslanib xulosa chiqarish analogiya deyiladi.*

Analogiya bo'yicha xulosa chiqarishni sxematik ravishda quyidagicha tasvirlash mumkin: F figura $a, b, c, d, \ldots$ xossalarga ega. F_1 figura esa $a, b, c, \ldots$ xossalarga ega bo'lsa, u holda F_1 figura ham d xossaga ega bo'lishi mumkin.

Fikrimizning dalili sifatida quyidagi tengsizlikni isbot qilaylik. Har qanday tetraedr uchun $\frac{1}{2}(|AB|+|BC|+|AC|)<|SA|+|SB|+|SC|$ tengsizlik o'rinli.

Bizga ma'lumki, fazodagi tetraedr figurasi tekislikda uchburchak figurasiga analogik figuradir, shuning uchun har qanday uchburchak uchun o'rinli bo'lgan quyidagi xossadan foydalaniladi.

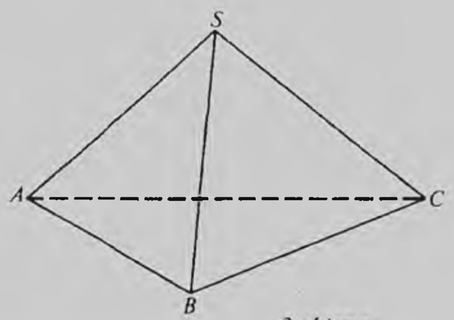
Har qanday uchburchakda ikki tomon uzunligining yig'indisi uchinchi tomon uzunligidan kattadir (2-chizma):



2-chizma.

$$|AB|+|BC|>|AC|.$$

Agar uchburchak uchun o'rinli bo'lgan ana shu xossani unga analogik bo'lgan figura tetraedrga tatbiq qilsak, quyidagi tengsizlik hosil bo'ladi (3-chizma):



3-chizma.

$$\left.\begin{array}{l} |AB|<|SA|+|SB| \\ |BC|<|SB|+|SC| \\ |AC|<|SA|+|SC| \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(|AB|+|BC|+|AC|\right)<|SA|+|SB|+|SC|.$$

Takrorlash uchun savollar

1. Bilish deb qanday psixologik jarayonga aytiladi?
2. Tafakkur tushunchasining ta'rifini aytib bering.
3. Sezgi deb nimaga aytiladi?
4. Idrok va tasavvur tushunchalarini ta'riflang.
5. Matematik tushunchaga ta'rif bering.
6. Tushunchaning mazmunini ta'riflang.
7. Tushunchaning hajmi deganda nimani tushunasiz?
8. Tushunchaning jinsi va uning turi deganda nimani tushunasiz?
9. Ta'rif so'zining lug'aviy ma'nosini aytib bering.
10. Real, klassifikatsion va genetik ta'riflarini aytib bering.
11. Matematik tushunchalar qanday metodlar yordamida kiritiladi?
12. Matematik hukm tushunchasiga ta'rif bering.
13. Matematik xulosa deb nimaga aytiladi?
14. Matematik xulosa turlarini aytib bering.
15. Matematik induksiya metodini tushuntiring.

Tayanch iboralar

Bilish, tafakkur, hissiy bilish, mantiqiy bilish, sezgi, idrok, tasavvur, tushuncha, tushunchaning mazmuni, tushunchaning hajmi, tushunchaning jinsi, ta'rif, genetik ta'rif, matematik tushuncha, matematik hukm, matematik xulosa, induksiya, deduksiya.

III bob
MAKTAB MATEMATIKA KURSIDA TA'LIM METODLARI

1-§. Matematik ta'lim metodlari

Metod so'zi grekcha so'z bo'lib, «yo'l ko'rsatish» demakdir. «Ta'lim metodi» tushunchasi esa hozirgi zamon metodika va didaktika fanlaridagi asosiy tushunchalardan biridir, ammo bu tushuncha yaqin vaqtlarga qadar har xilmetodik adabiyotlarda turli mazmunda qo'llanib kelinar edi. XIX asrga qadar bo'lgan metodik adabiyotlarda «metod» tushunchasi matematika kursining asosiy mazmunini bayon qiluvchi mavzuning tavsifi sifatida ishlatiladi. Masalan, «Sonlarni o'rganish metodi», «Geometrik figuralarni o'rganish metodi» va hokazo.

Hozirgi zamon didaktikasida, jumladan, matematika o'qitish metodikasi fanida ta'lim metodining muammolari umumiy holda hal qilingan bo'lib, u o'zining quyidagi ikki tomoni bilan xarakterlanadi:

a) o'qitish (o'qituvchining faoliyati);

b) o'rganish (o'quvchilarning ongli bilish faoliyati).

Ta'lim jarayoni o'qitish va o'rganishdan iborat bo'ladigan bo'lsa, u holda o'qitish (o'quvchilarning bilish faoliyatlarini boshqarish va tekshirishga doir axborot turlari, usul va vositalari), o'rganish (o'quv materialini o'quvchilar tomonidan o'zlashtirishning turlari, usul va vositalari) o'zining quyidagi metodlari orqali amalga oshiriladi. O'qitish va o'rganish metodlari o'zaro bir-biri bilan uzviy aloqadorlikda bo'lib, maktabda o'qitish jarayonini amalga oshiradi. Maktab matematika kursida ta'lim metodlarini quyidagicha klassifikatsiyalash mumkin.

1. Ilmiy izlanish metodlari (kuzatish, tajriba, taqqoslash, analiz va sintez, umumlashtirish, abstraksiyalash va klassifikatsiyalash).
2. O'qitish metodlari (evristik metod, programmalashtirilgan ta'lim metodi, muammoli ta'lim metodi, ma'ruza va suhbat metodlari).
3. Xulosa chiqarish metodlari (induksiya, deduksiya va analogiya).

2-§. Matematika o'qitishdagi ilmiy izlanish metodlari

Ma'lumki, matematika fanini o'rganadigan obyekti materiyadagi narsalarning fazoviy shakllari va ular orasidagi miqdoriy munosabatlardan iboratdir. Ana shu shakllar orasidagi miqdoriy munosabatlarni aniqlash jarayonida matematiklar izlanishning ilmiy metodlaridan vosita sifatida foydalanadilar.

Matematikadagi izlanishning ilmiy metodlari bir vaqtning o‘zida matematikani o‘qitishdagi ilmiy izlanish metodlari vazifasini ham bajaradi. O‘qitishdagi ilmiy izlanish metodlari quyidagilardan iboratdir.

1. Tajriba va kuzatish. 2. Taqqoslash. 3. Analiz va sintez. 4. Umumlashtirish. 5. Abstraksiyalash. 6. Aniqlashtirish. 7. Klassifikatsiyalash.

3-§. Tajriba va kuzatish metodi

Ta’rif. *Matematik obyektdagi narsalarning xossalari va ularning o‘zaro munosabatlarini belgilovchi metod kuzatish deyiladi.*

Misol. IV–V sinf o‘quvchilariga bir necha figurani ko‘rsatib, bu figuralar ichidan o‘q simmetriyasiga ega bo‘lgan geometrik figuralarni ajrating deb buyursak, o‘quvchilar barcha figuralarni ko‘rib chiqib quyidagicha xulosaga kelishlari mumkin. Figuralar ichida o‘zidan biror o‘qqa nisbatan ikki qismga ajragan figuralar bo‘lsa hamda ularni ana shu o‘q bo‘yicha buklaganda qismlar ustma-ust tushsa, bunday figuralar simmetrik figuralar bo‘ladi. Ammo boshqa figuralarda o‘zlarini teng ikkiga bo‘luvchi to‘g‘ri chiziqlar bo‘lmasligi mumkin. U holda bunday figuralar nosimmetrik figuralar bo‘ladi. Biz figuralardagi bunday xossa va ular orasidagi munosabatlarni kuzatish orqali figuralarni simmetrik va nosimmetrik figuralarga ajratildi.

Ta’rif. *Matematik obyektdagi narsalarning xossalari va ular orasidagi miqdoriy munosabatlarni sun’iy ravishda bo‘lak (qism)larga ajratish yoki ularni birlashtirish tajriba metodi deyiladi.*

Misol. O‘quvchilarga natural sonlarni tub ko‘paytuvchilarga ajratish o‘rgatiladi:

$$1=1,\ 2=2\cdot1;\ 3=3\cdot1;\ 4=4\cdot1;\ 5=5\cdot1;\ \ldots$$

O‘quvchilarda ixtiyoriy natural sonlarni misolda ko‘rsatilganidek, tub ko‘paytuvchilarga ajratish jarayonida tajriba hosil bo‘lib, ular natural sonlar to‘plamida tub va murakkab sonlar mavjud ekanligini tushunib yetadilar. Murakkab natural sonlarni ham tub ko‘paytuvchilarga ajralishini, ammo ularning ko‘paytuvchilari kamida uchta va undan ortiq bo‘lishini tajriba orqali tekshirib ko‘radilar.

Masalan: $4=2\cdot2\cdot1;\ 6=3\cdot2\cdot1;\ 25=5\cdot5\cdot1;\ 36=3\cdot3\cdot2\cdot2\cdot1.$

Kuzatish va tajriba natijasida tub hamda murakkab sonlarni qonun va qoidalari o‘quvchilarga tushuntiriladi.

4-§. Taqqoslash metodi

Ta'rif. *O'rganilayotgan matematik obyektdagi narsalarning o'xshash va farqli tomonlarini aniqlovchi metod taqqoslash metodi deyiladi.*

Taqqoslash metodi ham ilmiy izlanish metodlaridan biridir. Taqqoslash metodini matematika darslarida o'rganilayotgan mavzu materiallariga tatbiq qilishda quyidagi prinsiplarga amal qilinadi:

1) taqqoslanayotgan matematik tushunchalar bir jinsli bo'lishi kerak;

2) taqqoslash o'rganilayotgan matematik obyektdagi narsalarning asosiy xossalariga nisbatan bo'lishi kerak.

1- misol. Uchburchak figurasi bilan to'rtburchak figurasi taqqoslanganda ularning o'xshash tomonlari: uchlari, burchaklari; ularning o'zaro farqli tomonlari:

a) uchburchakda uchta uch va uchta tomon;

b) to'rtburchak to'rtta uch va to'rtta tomondan iboratligi aniqlanadi.

Bu misolda taqqoslashning ikkala prinsipi ham bajarildi, ya'ni uchburchak va to'rtburchak figuralari bir jinsli tushunchalar bo'lib, ikkalasi ham ko'pburchakning xususiy hollaridir hamda taqqoslash metodi ikkala figuraning asosiy xossalariga nisbatan amalga oshirildi.

2- misol. 8-sinf algebra kursida arifmetik progressiya n-hadini hisoblash formulasini keltirib chiqarish ham taqqoslash metodi orqali amalga oshiriladi.

Ta'rif. *Ikkinchi hadidan boshlab o'zidan avvalgi har bir hadiga biror o'zgarmas son qo'shilishidan hosil bo'ladigan sonlar ketma-ketligi arifmetik progressiya deyiladi.*

Faraz qilaylik, $a_1, a_2, a_3, ... a_n, ...$ ko'rinishdagi sonlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin. d — o'zgarmas son bo'lsin, u holda ta'rifga ko'ra:

$$a_2 = a_1 + d \quad (1)$$

$$a_3 = a_2 + d \quad (2)$$

(1) va (2) dan:

$$a_3 = a_1 + d + d = a_1 + 2d. \quad (3)$$

Shuningdek,

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d. \quad (4)$$

(3) va (4) larning o'zaro taqqoslash hamda induksiya metodini tatbiq qilish natijasida arifmetik progressiya n-hadini hisoblash formulasi keltirib chiqariladi:

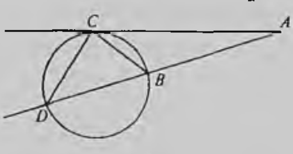
$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-2)d + d = a_1 + (n-1)d.$$

5-§. Analiz va sintez metodi

Ta'rif. *Noma'lumlardan ma'lumlarga tomon izlash metodi analiz deyiladi.*

Analiz metodi orqali fikrlashda o'quvchi quyidagi savolga javob berishi kerak: *«Izlanayotgan noma'lumni topish uchun nimalarni bilish kerak?» Analiz metodini psixologlar bunday ta'riflaydilar: «butunlardan bo'laklarga tomon izlash metodi analiz deyiladi».*

Fikrlashning analiz usulida har bir qadamning o'z asosi bor bo'ladi, ya'ni har bir bosqich bizga ilgaridan ma'lum bo'lgan qoidalarga asoslanadi. Fikrlarimizning dalili sifatida quyidagi teoremani analiz metodi bilan isbot qilamiz.



4-chizma.

T e o r e m a. *Aylana tashqarisidagi nuqtadan aylanaga kesuvchi va urinma o'tkazilsa, kesuvchi kesmalarning ko'paytmasi urinmaning kvadratiga teng (4-chizma).*

B e r i l g a n: teoremada berilgan barcha shartlarni *Ш*, xulosani esa *X* bilan belgilaylik.

Ш: $[AC]$ — urinma;
C — urinish nuqasi;
$[AD]$ — kesuvchi;
$[AB]$ — uning tashqi qismi.

I s b o t q i l i s h k e r a k: $AC^2 = |AD| \cdot |AB|$.

I s b o t i. Bu teoremani isbotlash uchun oldindan ma'lum bo'lgan matematik faktlar kerak bo'ladi, ularni qisqacha Φ bilan belgilasak, teoremani shart va xulosalarini quyidagicha yozish mumkin:

$$Ш, \Phi \longrightarrow X.$$

Isbotlash natijasida hosil qilinadigan $AC^2 = |AD||AB|$ natijani yana quyidagicha yozish mumkin:

$$\left[(Ш, \Phi), \left(\frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|AB|}{|AC|}\right)\right] \Rightarrow X.$$

Endi bizning maqsadimiz shart va ma'lum faktlar asosida $\frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|AB|}{|AC|}$ ni aniqlashdan iborat. Bu savolga javob proporsiyaning o'zidan ko'rinib turibdi, agar AC va AD larni bir uchburchak tomonlari desak, u holda AC va AB larni ikkinchi uchburchak tomonlari deya olamiz. U holda ΔACD va $\Delta\ ABC$ larni hosil qilish kerak bo'ladi. Buning uchun B va C hamda C va D nuqtalarni o'zaro birlashtirish kifoya. U

holda, $\left[(\text{Ш},\text{Ф}),(\Delta ACD \sim \Delta ABC)\ \right] \Rightarrow \dfrac{|AC|}{|AD|} = \dfrac{|AB|}{|AC|}$.

Endi esa bu uchburchaklarning o'xshashliklari bizga noma'lumdir, ya'ni

$$(\text{Ш},\text{Ф}), \Rightarrow \Delta ACD \sim \Delta ABC.$$

Bunda ikki uchburchak o'xshash bo'lishi uchun qanday shartlar bajarilishi kerak degan savol tug'iladi, bunga quyidagicha javob berish mumkin:

$$\left[(\text{Ш},\text{Ф}), \angle A = \angle A, = \angle ACD = \angle ADC\right] \overset{?}{\Rightarrow} (\Delta ACD \sim \Delta ABC).$$

Bu mulohazalardan esa quyidagi savollar kelib chiqadi:

$(\text{Ш},\text{Ф}) \overset{?}{\Rightarrow} \angle A = \angle A.$ $(\text{Ш},\text{Ф}) \overset{?}{\Rightarrow} \angle ACB = \angle ADC.$ Bu savollarga esa quyidagicha javob berish mumkin:

1) har qanday burchak o'z-o'ziga teng;

2) aylanaga ichki chizilgan burchaklar haqidagi teoremaga ko'ra yoki ushbu burchaklarni o'lchash orqali hal qilish mumkin.

Yuqoridagi isbotni sxema orqali bunday ifodalash mumkin:

$$\text{Ш},\text{Ф} \overset{?}{\Rightarrow} X$$

$$\left|\ \text{Ш},\text{Ф},\left(\frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|AB|}{|AC|}\right)\right] \overset{?}{\Rightarrow} X \qquad (\text{Ш},\text{Ф}) \overset{?}{\Rightarrow} \left[\left(\frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|AB|}{|AC|}\right)\right]$$

$$[(\text{Ш},\text{Ф}),(\Delta ACD \sim \Delta ABC)] \overset{?}{\Rightarrow} \left(\frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|AB|}{|AC|}\right)(\text{Ш},\text{Ф}),] \overset{?}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow (\Delta ACD \sim \Delta ABC)$$

$$(\text{Ш},\text{Ф}), \hat{A} = \hat{A} \qquad A\hat{C}B = A\hat{D}C] \overset{?}{\Rightarrow} (\Delta ACD \sim \Delta ABC)$$

$$(\text{Ш},\text{Ф}) \overset{?}{\Rightarrow} (\hat{A} = \hat{A}) \qquad (\text{Ш},\text{Ф}) \overset{?}{\Rightarrow} (A\hat{C}D)B = A\hat{D}C).$$

T e o r e m a. *Ikki son yig'indisining o'rta arifmetigi shu sonlar o'rta geometrigidan kichik emas.*

$$\forall(a,b) \geq 0, \qquad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

I s b o t i.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \to \text{analiz}$$
$$\Downarrow$$
$$a+b \geq 2\sqrt{ab}$$
$$\Downarrow$$
$$a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$$
$$\Downarrow$$
$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0.$$

Misol. Quyidagi tenglama analiz metodi bilan yechilsin:

$$\frac{\lg 2(x+1)}{\lg 2(x-3)} = 2.$$

Bu tenglamaning yechimini topishning o'zi noma'lumdan ma'lumga tomon izlanish demakdir. Bu tenglama $x > 3$ va $x \neq 4$ larda ma'noga egadir:

$$lg2(x+1) = 2\,lg(x-3), \qquad x^2 - 8x + 7 = 0$$

$$lg2(x+1) = \lg(x-3)^2, \qquad x_1 = 7$$

$$2(x+1) = (x-3)^2, \qquad x_2 = 1$$

$$2x + 2 = x^2 - 6x + 9.$$

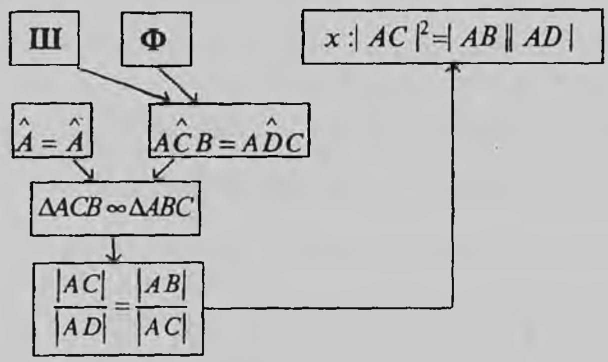
Bunda $x>3$ bo'lgani uchun $x_2=1$ yechim bo'la olmaydi, shuning uchun $x_1 = 7$ yagona yechimdir.

Ta'rif. *Ma'lumlardan noma'lumlarga tomon izlash metodi sintez deyiladi.*

Sintez metodida fikrlashning bir bosqichidan ikkinchi bosqichiga o'tish go'yoki ko'r-ko'rona bo'ladi, bu o'tishlar o'quvchiga noaniqroq bo'ladi. Sintez metodida biz berilganlarga asoslanib nimalarni topa olamiz, degan savolga javob beramiz. Yuqoridagi teoremani sintez metodi orqali isbot qilaylik.

B e r i l g a n: *ID*: $[AC]$ – urinma; C – urinish nuqtasi; $[AD]$ – kesuvchi; $[AB]$ – uning tashqi qismi.

Isbot qilish kerak: $Ш, Ф \longrightarrow \quad (X: AC^2 = |AD|\,|AB|)$.
Biz isbotning sintez metodini quyidagi sxema orqali chizib ko‘ramiz:



2-teorema. *Ikki son yig‘indisining o‘rta arifmetigi shu sonlarning o‘rta geometrigidan kichik emas.*

$$\forall (a,b) \geq 0, \qquad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Isboti.

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$
$$(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 \geq 0$$
$$a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$$
$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Yuqoridagilardan ko‘rinadiki, analiz sintez metodiga nisbatan ancha qulay metod ekan, chunki bunda o‘quvchilar o‘z mulohazalarni mustaqil ravishda asoslab isbotlashga doir misol va masalalarni yechishlariga yordam beradi. Umuman olganda, analiz va sintez metodlari bir-biridan ajralmaydigan metodlardir. Masalan, teoremani analiz yo‘li bilan isbot qilinsa, uni sintez metodi orqali tushuntiriladi, chunki bu metod ancha ixcham va maqsadga tomon tezroq olib keladigan metoddir. Fikrlarimizning dalili sifatida quyidagi misolni ham sintez metodi orqali yechamiz.

Misol. $x_1 = 7$ va $x_2 = 1$ yechimlarni qanoatlashtiruvchi logarifmik tenglama tuzilsin. Bu yerda qo‘yilgan savolning o‘zi ma’lumdan noma’lumga tomon izlashni talab qilyapti, shuning uchun bu savolga sintez metodi orqali javob beriladi. Bu yerdagi bajarilishi kerak bo'lgan matematik jarayon ildizdan tenglamaga tomon olib boriladi.

1) $x_1 = 7$ va $x_2=1$ yechimlarni qanoatlantiruvchi tenglamani quyidagicha tuzish mumkin:

$$(x - 7)(x - 1) = 0,$$

$$x^2 - 8x + 7 = 0.$$

Ayniy almashtirish bajarish bilan quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$x^2 - 6x - 2x + 9 - 2 = 0, \quad \frac{\lg 2(x+1)}{\lg(x-3)} = 2$$

$$2x + 2 = x^2 - 6x + 9,$$

$$2x + 2 = (x - 3)^2,$$

$$lg(2(x+1)) = 2 \cdot lg(x - 3)|: lg(x - 3) \neq 0.$$

Biz sintez metodi yordamida ma'lum bo'lgan $x_1=7$ va $x_2=1$ ildizlarni qanoatlantiruvchi $\frac{\lg 2(x+1)}{\lg(x-3)} = 2$ ko'rinishdagi noma'lum tenglamani hosil qildik.

6-§. Umumlashtirish metodi

Umumlashtirish tushunchasi ham matematika o'qitishdagi ilmiy izlanish metodlaridan biri bo'lib hisoblanadi. Umumlashtirish usulining ahamiyatini atoqli olim A.N. Kondakov quyidagicha ta'riflaydi.

«Umumlashtirish shunday mantiqiy usulki, uning vositasi orqali birlik fikrlashlardan umumiy fikrlashlarga o'tiladi».

Maktab matematika kursida umumlashtirish tushunchasi quyidagicha tatbiq qilinadi:

1) matematik tushunchalarni umumlashtirish;
2) teoremalarni isbotlashda umumlashtirish;
3) misol va masalalarni yechishda umumlashtirish.

Endi umumlashtirish tatbiqlari alohida-alohida ko'rib chiqiladi.

1. Matematik tushunchalarni umumlashtirish

Ta'rif. *Matematik obyektdagi narsalarning asosiy xossalarini aks ettiruvchi tafakkur shakli matematik tushuncha deyiladi.*

Har bir matematik tushuncha o'zining ikki tomoni bilan xarakterlanadi:

a) tushunchaning mazmuni;

b) tushunchaning hajmi.

Ta'rif. Tushunchaning mazmuni deb, ana shu tushunchani ifodalovchi asosiy xossalarning to'plamiga aytiladi.

Masalan, to'rtburchak tushunchasini olaylik. To'rtburchak tushunchasining mazmuni quyidagi asosiy xossalar to'plamidan iborat:

1) to'rtburchakning diagonali uni ikkita uchburchakka ajratadi.

2) ichki qarama-qarshi burchaklarning yig'indisi 180° ga teng.

3) diagonallari bir nuqtada kesishadi va shu nuqtada ikkita bo'lakka bo'linadi.

Ta'rif. Tushunchaning hajmi deb ana shu tushunchaga kirgan barcha obyektlar to'plamiga aytiladi.

Masalan, to'rtburchak tushunchasining hajmi to'rtburchak tushunchasiga kirgan barcha to'rtburchak turlaridan, ya'ni: parallelogramm, kvadrat, romb va trapetsiyadan iborat. Bundan ko'rinadiki, to'rtburchak tushunchasining hajmini tomonlari uzunliklarining miqdori turlicha bo'lgan barcha katta va kichik to'rtburchaklar tashkil qilar ekan. Hajm jihatidan keng, mazmun jihatidan esa tor bo'lgan tushunchani ***jins tushunchasi*** va aksincha hajmi tor, mazmuni esa keng bo'lgan tushunchani ***tur tushunchasi*** deb yuritiladi. Masalan, akslayntirish tushunchasini olaylik. Bu tushunchadan qaytuvchi va qaytmaydigan akslantirish tushunchalari kelib chiqadi.

Bu yerda akslantirish tushunchasi qaytuvchi va qaytmaydigan akslantirish tushunchalariga nisbatan jins tushunchasi, qaytuvchi hamda qaytmaydigan akslantirish tushunchalari akslantirish tushunchasiga nisbatan tur tushunchalari bo'ladi. Yuqoridagi mulohazalardan ko'rinadiki, jins tushunchasi tur tushunchalariga nisbatan umumiy bo'lgan tushuncha ekan. Shuning uchun ham tushunchani umumlashtirishga quyidagicha ta'rif berilgan: *«Tur tushunchalaridan jins tushunchalariga o'tish tushunchani umumlashtirish deyiladi»*. Umumlashtirish jarayonida o'rganilayotgan tushunchalar orasida umumiy xarakterli mosliklar o'rnatilib, umumiy fikrlashlarga o'tiladi. Yuqoridagi mulohazalardan ko'rinib turibdiki, umumlashtirish jarayonida umumlashtirilgan tushunchaning hajmi ortib, mazmuni torayar ekan.

Misol. Qaytuvchi akslantirish tushunchasining hajmi B bo'lsin, uning mazmuni α bo'lsin. Akslantirish tushunchasining hajmi H uning mazmuni esa β bo'lsin. Tushunchani umumlashtirishga berilgan ta'rifga ko'ra quyidagi munosabat o'rinli bo'ladi: $(B \subset H) \Rightarrow (\alpha > \beta)$. Bunda B – qaytaruvchi akslantirishning hajmiga obyektiv akslantirish kiradi. H – akslantirishning hajmiga esa barcha akslantirishlar kiradi. Shuning uchun qaytuvchi akslantirish tushunchasi akslantirish tushunchasining qismi bo'lmoqda. Boshqacha aytganda, akslantirish tushunchasi qaytuvchi va qaytmaydigan akslantirish tushunchalarining umumlashgan holi ekan.

Endi uning mazmuniga kelsak, bu yerda qaytuvchi akslantirish degandafaqat shu akslantirishning xossalarinigina o'rganamiz. Demak, o'rganadigan tushunchaning mazmuni aniq. Endi akslantirish tushunchasini olsak, bu yerda biz o'rganadigan tushunchaning mazmuni noaniqroq, chunki akslantirish tushunchasidan ikkita, ya'ni qaytuvchi va qaytmaydigan akslantirish tushunchalari kelib chiqadi. Bulardan ko'rinib turibdiki, qaytuvchi akslantirish tushunchasining mazmuni akslantirish tushunchasining mazmunidan katta ekan, ya'ni: $\alpha > \beta$.

1. Teoremalarni isbotlashda umumlashtirish

Teoremalarni umumlashtirish jarayonida o'quvchilar uning shart va xulosa qismini o'zaro ajratishlari hamda ular orasidagi o'xshash va farq tomonlarini analiz qilishlari lozimdir.

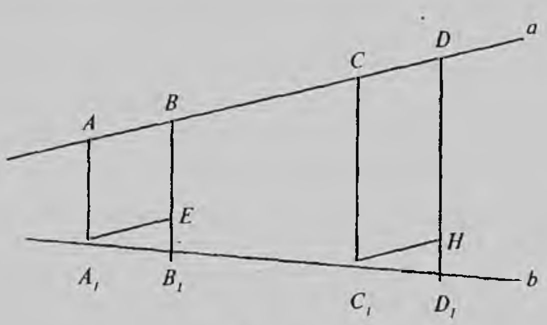
Analiz qilish quyidagi bosqichlar orqali amalga oshiriladi:

1) teoremada qatnashayotgan xossalarni asosiy va asosiy bo'lmagan xossalar guruhiga ajratiladi;

2) teoremani umumlashtirish uchun uning shartida qatnashayotgan asosiy xossalardan qaysi birining mazmunini o'zgartirish kerakligi aniqlanadi;

3) teorema umumlashgan holda isbot qilinadi.

T e o r e m a. *Agar bir to'g'ri chiziqda bir necha kongurent kesma ajratilsa va ularning uchlaridan ikkinchi to'g'ri chiziqni kesuvchi o'zaro parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazilsa, ular ikkinchi to'g'ri chiziqda o'zaro kongurent kesmalar ajratadi* (5-chizma).



5-chizma.

Berilgan: $[AB] \wedge [CD] \in a,$
$[AB] \cong [CD],$
$[AA_1] \| [BB_1] \| [CC_1] \| [DD_1].$

Isbot qilish kerak: $[A_1B_1] \cong [C_1D_1] \in b.$

Isboti. Bu teoremani isbotlashda uchburchaklar kongurentligining alomatidan foydalanish maqsadga muvofiqdir. Chizmadan:

$$[AB] \| [A_1E] \wedge [CD] \| [C_1H].$$

$\Delta A_1EB_1 \cong \Delta C_1HD_1$ bir tomoni va unga yopishgan burchaklariga ko'ra, natijada:

$$[A_1B_1] \cong [C_1D_1] \in b.$$

Fales teoremasida asosan ikki shart bor: 1) a to'g'ri chiziqda konguruyent kesmalar ajratilsin, 2) kesmalarning uchlaridan b to'g'ri chiziqni kesuvchi parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazilsin. Faraz qilaylik, a to'g'ri chiziqda konguruyent kesmalar emas, balki ixtiyoriy kesmalar ajrataylik, u holda teoremaning mazmuni quyidagicha bo'ladi: «Agar bir to'g'ri chiziqda bir necha ixtiyoriy kesma ajratilsa va ularning uchlaridan ikkinchi to'g'ri chiziqni kesuvchi o'zaro parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazilsa, ular ikkinchi to'g'ri chiziqda ham ixtiyoriy kesmalar ajratadi».

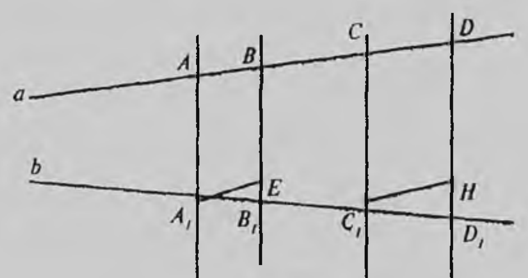
Berilgan:

$([AB] \wedge [BC]) \in a;$ $[AA_1] \| [BB_1] \| [CC_1] \| [DD_1].$

Isbot qilish kerak:

$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|A_1B_1|}{|C_1D_1|}.$$

Isboti. 6-chizmada:



6-chizma.

$$(\Delta A_1EB_1 \infty \Delta C_1HD_1) \Rightarrow \frac{|A_1B_1|}{|C_1D_1|} = \frac{|A_1E|}{|C_1H|}$$

$$[A_1E] \| [AB] \wedge ([C_1H] \| [CD]) \Rightarrow [A_1E] \cong [AB] \wedge ([C_1H] \cong [CD]) \Rightarrow \quad (1)$$

$$\Rightarrow (|A_1E| = (|AB|) \wedge (|C_1H| = |CD|)).$$

(1) tenglikdagi $|A_1E|$ va $|C_1H|$ o‘rniga (2) tenglikdagi AB va CD lar qo‘yilsa, qo‘yidagi tenglik hosil bo‘ladi:

$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|A_1B_1|}{|C_1D_1|}.$$

(3) tenglik proporsional kesmalar haqidagi teoremaning natijasidir. Demak, proporsional kesmalar haqidagi teorema Fales teoremasining umumlashgan holi ekan.

3. Masalalarni yechishda umumlashtirish

Ma’lumki, maktab geometriya kursi deduktiv asosda mantiqiy qurilgan fandir. Shuning uchun ham maktab matematika kursidagi barcha amaliy materiallar o‘quvchilarning mantiqiy fikrlash qobiliyatlarini har tomonlama shakllantirishga qaratilgandir. O‘quvchilarning mantiqiy fikrlash qobiliyatlarini shakllantirish esa matematikada yechiladigan amaliy mavzu materiallariga o‘qitishning ilmiy izlanish metodlarini izchillik bilan tatbiq qilish lozimligini taqozo etadi. Ana shunday metodlardan biri umumlashtirish usulidir.

1-misol. Berilgan ikki kesmaga o‘rta proporsional bo‘lgan kesmani yasash qoidasiga asoslanib, bir-biriga teng bo‘lmagan ixtiyoriy ikki musbat sonning o‘rta arifmetigi shu sonlarning o‘rta geometrigidan katta son ekanligini isbot qiling.

Berilgan: a va b sonlar; $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$.

Isbot qilish kerak: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Isboti.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \qquad \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = 0, \qquad a+b-2\sqrt{ab} \geq 0$$

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0 \text{ demak } \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

I. Faraz qilaylik, berilgan sonlar uchta bo'lsin. Berilgan: *a, b, c* – sonlar; $a>0$, $b>0$, $c>0$, $a \neq b \neq c$.

Isbot qilish kerak: $\frac{a+b+c}{2} \geq \sqrt[3]{abc}.$

Isboti. Faraz qilaylik, $a = x^3$, $b = y^3$, $c = z^3$ bo'lsin, u holda

$$\left(\frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geq \sqrt[3]{x^3y^3z^3}\right) \Rightarrow \left(x^3+y^3+z^3 \geq \sqrt[3]{x^3y^3z^3} \cdot 3\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x^3+y^3+z^3 \geq 3xyz\right) \Rightarrow \left(x^3+y^3+z^3-3xyz \geq 0\right). \quad (1)$$

Agar (1) tengsizlikning o'rinli bo'lishi ko'rsatilsa, $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ ekanligi ko'rsatilgan bo'linadi:

$$[\left(x^3+y^3+z^3-3xyz\right) \geq 0] \Rightarrow [(x+y+z)^3-3(x+y+z)\times$$

$$\times(xy+xz+yz)] \geq 0 \Rightarrow [(x+y+z)\times$$

$$\times\left(x^2+y^2+z^2-xy+xz+yz\right)] \geq 0. \quad (2)$$

(2) dagi birinchi ko'paytuvchi musbat, shuning uchun ikkinchi ko'paytuvchini musbat ekanligi ko'rsatiladi, (1) tengsizlikning musbat ekanligini ko'rsatgan bo'lamiz:

$$\left(x^2+y^2+z^2-xy+xz+yz\right)=\frac{1}{2}\left(2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2yz\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left[(x-z)^2+(x-y)^2+(y-z)^2\right] \geq 0. \quad (3)$$

(3) tengsizlik doimo berilishiga ko'ra musbatdir, agar $x=y=z$ bo'lsa, (3) tengsizlik nolga teng bo'ladi, bu holda (1) tengsizlik tenglikga aylanadi.

Demak, $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ tengsizlik o'rinli ekan.

II. Faraz qilaylik, berilgan sonlar to'rtta bo'lsin.
Berilgan: *a, b, c, d* – sonlar; $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$.

Isbot qilish kerak: $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}.$

Isboti. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{abc}$ ga asosan

$$\left[\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} \geq \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{c+d}{2}\right)}\right] \Rightarrow \frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{c+d}{2}\right)}.$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{ab}. \qquad \left(\frac{c+d}{2}\right) \geq \sqrt{cd} \tag{4}$$

bo'lgani uchun bularni (4) ga qo'ysak:

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}} \Rightarrow \frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}.$$

Demak, $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Endi yuqoridagi tengsizlikni har qanday n uchun o'rinli deb, matematik induksiya metodi orqali umumlashgan $(n + 1)$ hol uchun isbot qilamiz:

$$a_{n+1} \geq \frac{a_1 + a_2 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = N_n;$$

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_{n+1}}{n+1} = N_{n+1};$$

$$a_{n+1} = N_n + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \quad \text{bo'lsin}$$

$$\left(N_{n+1} = \frac{nN_n + a_{n+1}}{n+1}\right) \Rightarrow \left(N_{n+1} = \frac{nN_n + N_n + \varepsilon}{n+1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(N_{n+1} = \frac{N_q(n+1+\varepsilon}{n+1}\right) \Rightarrow \left(N_{n+1} = N_n + \frac{\varepsilon}{n+1}\right);$$

$$(N_{n+1})^{n+1} = \left(N_n + \frac{\varepsilon}{n+1}\right)^{n+1} = N_n^{n+1} + (n+1) \cdot N_n^n \cdot \frac{\varepsilon}{n+1} + \ldots \geq$$

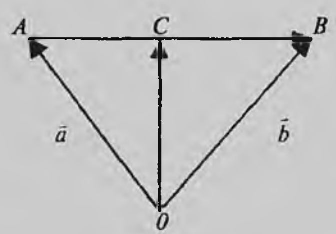
$$\geq \left(N_n^{n+1} + N_n^n \cdot \varepsilon\right) = N_n^n (N_n + \varepsilon) = N_n^n a_{n+1};$$

$$\left((N_{n+1})^{n+1} \geq N_n^n a_{n+1}\right) \Rightarrow \left(N_{n+1} \geq \sqrt[n+1]{N_n^n a_{n+1}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_{n+1} \geq \sqrt[n+1]{a_1 a_2 \cdots a_{n+1}}.$$

Demak, $$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_{n+1}}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{a_1 a_2 \ldots a_{n+1}}.$$

2-misol. C nuqta $[AB]$ kesmani teng ikkiga bo'ladi. O ixtiyoriy nuqta. $\overline{OC}$ vektorni $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overline{OB} = \vec{b}$ vektorlar orqali ifodalang (7-chizma).



7-chizma.

Berilgan: $[AB]$, $\overline{OA} = \vec{a}$, $\overline{OB} = \vec{b}$,

$$\left(\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = 1\right) \Rightarrow |\overline{AC}| = |\overline{CB}|.$$

Topish kerak: $\overrightarrow{OC} = ?$

Yechish: shartga ko'ra: $\left(\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = 1\right)$ bo'lgani uchun $|\overline{AC}| = \dfrac{1}{2}|\overline{AB}|$ (1)

bo'ladi.

Chizmadan: $\overline{AC}$ va $\overline{AB}$ vektorlarning yo'nalishlari bir xil bo'lgani uchun

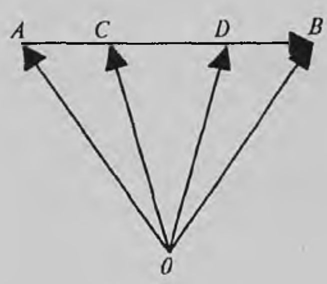
$$\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA}, \quad (2)$$

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}, \quad (3)$$

(2) va (3) larni (1) ga qo'yilsa, quyidagi ifodalar hosil bo'ladi:

$$\overline{OC} - \overline{OA} = \frac{1}{2}\left(\overline{OB} - \overline{OA}\right), \qquad \overline{OC} = \frac{1}{2}\left(\overline{OB} + \overline{OA}\right),$$

$$\overline{OC} = \frac{1}{2}\overline{OB} + \frac{1}{2}\overline{OA}, \qquad \overline{OC} = \frac{1}{2}\left(\vec{b} + \vec{a}\right).$$



8-chizma.

Endi shu kesmani ikkita C va D nuqtalar yordamida teng uch bo'lakka bo'laylik. O ixtiyoriy nuqta. $\overline{OC}$ va $\overline{AD}$ vektorlarni $\overline{OA} = \vec{a}$, $\overline{OB} = \vec{b}$ vektorlar orqali ifodalang (8-chizma).

Berilgan: $[AB]$, $\overline{OA} = \vec{a}$, $\overline{OB} = \vec{b}$

$$\overline{AC} = \frac{1}{3}\overline{AB}.$$

Topish kerak: $\overline{OC} = ?$

Yechish: shartga ko'ra: $\left(\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{1}{3}\right) \Rightarrow \overline{AC} = \frac{1}{3}\overline{AB},$ (1)

$\overline{AB}$ va $\overline{AC}$ vektorlarning yo'nalishlari bir xil bo'lganligi uchun

$$\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA}, \tag{2}$$

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}, \tag{3}$$

(2) va (3) larni (1) ga qo'ysak:

$$\overline{OC} - \overline{OA} = \frac{1}{3}\left(\overline{OB} - \overline{OA}\right), \qquad \overline{OC} = \frac{1}{3}\overline{OB} + \frac{2}{3}\overline{OA},$$

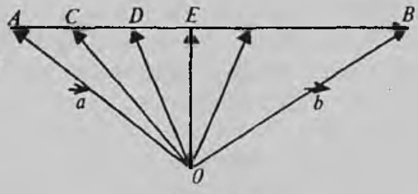
$$\overline{OC} = \frac{1}{3}\left(\overline{OB} + 2\overline{OA}\right), \qquad \overline{OC} = \frac{1}{3}\left(\vec{b} + 2\vec{a}\right).$$

Endi shu $[AB]$ kesmani $C, D, E, \ldots$ nuqtalar yordamida teng n ta bo'lakka bo'laylik. O — tekislikning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin (9-chizma). $\overline{OC}$ vektorni $\overline{OA} = \vec{a}$, $\overline{OB} = \vec{b}$ vektorlar orqali ifodalang.

Berilgan: $[AB]$,

$$\overline{OA} = \vec{a}, \quad \overline{OB} = \vec{b}, \quad \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{1}{n}.$$

Topish kerak: $\overline{OC}=?$



9-chizma.

Yechish: shartga ko'ra: $\dfrac{|AC|}{|AB|}=\dfrac{1}{n}.$

$\overline{AC}$ va $\overline{AB}$ vektorlarning yo'nalishlari bir xil bo'lganligi uchun

$$\overline{AC}=\overline{OC}-\overline{OA}, \tag{2}$$

$$\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}, \tag{3}$$

(2) va (3) larni (1) ga qo'ysak:

$$\overline{OC}-\overline{OA}=\frac{1}{n}\left(\overline{OB}-\overline{OA}\right),$$

$$\overline{OC}=\frac{1}{n}\left(\overline{OB}+(n-1)\overline{OA}\right).$$

$$\overline{OC}=\frac{1}{n}\left(\vec{b}+(n-1)\vec{a}\right).$$

7-§. Abstraksiyalash metodi

O'qitish jarayonidagi ilmiy izlanish metodlaridan biri bu abstraksiyalashdir. Abstraksiyalash — o'rganilayotgan obyektdagi narsalarning muhim belgilarini, sifat yoki xususiyatlarini fikran ajratib olib ana shu belgi, sifat yoki xususiyatlarni mustaqil fikr obyektiga aylantirishdan iborat tafakkur operatsiyasidir.

1-misol. O'qituvchi abstraksiyalash metodini o'quvchilarga 3·5=15 misol orqali tushuntirishi maqsadga muvofiq. Ma'lumki, bu oddiy matematik tenglikdir, ammo u obyektiv olamdagi ma'lum bir qonuniyatlarni aks ettiradi. Agar 3·5=15 tenglikka ma'lum bir shartlarni qo'yilsa, u holda bu tenglik quyidagi qonuniyatlarni ifodalaydi:

Agar 3 sonini qalamlarning soni, 5 sonini har bir qalamning qiymati desak, u holda 15 soni jami qalamlarning qiymatini (qancha turishini) ifodalaydi.

Agar 3 sonini odamning piyoda yurgan vaqti, 5 soni uning bir soatdagi tezligi desak. u holda 15 soni piyoda odamning 3 soat ichida bosib o'tgan yo'lini ifodalaydi.

2- misol. Fizika kursida jismning harakat tezligi tushunchasini $v_t=v_o+at$ formula bilan, metall sterjen uzunligini qizdirilgandagi o'zgarishini $l_x=l_o+at$ formula bilan, chiziqli funksiyaning burchak koeffitsiyentli formulasini esa $f(x)= ax + b$ bilan ifodalaymiz. Agar bu formulalarga diqqat bidan qarasak, $v_t=v_o+at$ va $l_x=l_o+at$ formulalar $f(x)= ax + b$ chiziqli funksiya formulasining fizikada yozilishi ekanligini ko'ramiz.

Yuqoridagi misollardan ko'rinib turibdiki, abstraksiyalash usulida narsalarning aniq holatidan uzoqlashib, ularning muhim belgilari haqidagina gap boradi, narsalarning turli ko'rinishlari bo'yicha fikr yuritilmaydi. O'quvchilarga abstraksiyalash metodini o'rgatish ularning narsa va hodisalarni muhim belgilarini ajrata olishlari hamda ilmiy tushunchalarni o'zlashtirishlari uchun katta ahamiyatga egadir.

8-§. Aniqlashtirish metodi

O'rganilayotgan obyektdagi narsalarning xossalarini bir tomonlama xususiy holda fikrlash ***aniqlashtirish*** deyiladi.

1- misol. $a^2 - b^2 = (a - b)\cdot(a + b)$ bu formulani aniq hollar uchun quyidagicha qo'llash mumkin:

$$\sqrt{81^2-63^2}=\sqrt{(81-63)(81+63)}=\sqrt{18\cdot 144}=12\cdot 3\sqrt{2}\approx$$

$$\approx 36\cdot 1.144\approx 50,9.$$

2- misol. Ma'lumki, kosinuslar teoremasi

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\hat{C}$$

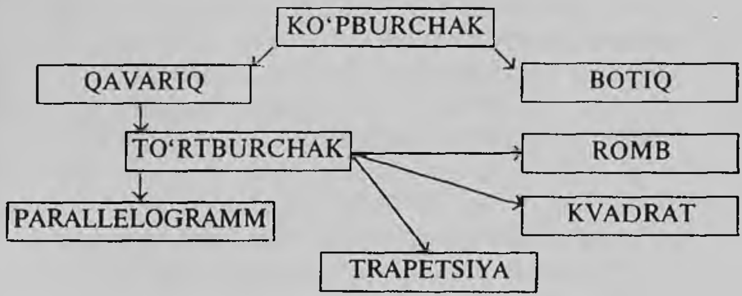
formula bilan ifodalanadi: Agar $C = 90°$ bo'lsa, $\cos 90° = 0$, u holda $c^2 = a^2 + b^2$ – Pifagor teoremasi kelib chiqadi.

9-§. Klassifikatsiyalash metodi

Ta'rif. *Jins tushunchalaridan tur tushunchalariga o'tish klassifikatsiyalash deyiladi.*

Klassifikatsiyalash jarayonida o'quvchilar (muhim yoki o'xshash) belgiga asoslangan holda, ularni bir sinfga birlashtirishga harakat qiladilar, ya'ni ularni o'xshash, umumiy va farqli tomonlarini qarab bir-biridan ajratadilar, buning natijasida ular tushunchalarni klassifikatsiya qiladilar.

Masalan, ko'pburchak tushunchasini klassifikatsiyalash quyidagicha amalga oshiriladi:



10-§. Evristik ta'lim metodi

«Evristika» degan so'zning ma'nosi savol-javobga asosan topaman demakdir. Evristik metod bilan o'qitish maktabdarda asosan, XIX asr boshlaridan boshlab qo'llanila boshlandi.

Atoqli pedagog-matematik S.I.Shoxor-Trotskiy o'zining «Геометрия на задачах» nomli kitobida bunday yozadi: «Geometrik mashg'ulotlar o'quvchilarga qiziqarli bo'lishi uchun, bu mashg'ulotlardagi har bir masala yoki topshiriq so'zma-so'z quruq yodlash uchun emas, balki ularning aqliy faoliyatlarini ishga soladigan xarakterda bo'lishi kerak. (Shoxor-Trotskiy S.I. «Geometriya na zadachax» M., 1908-y. 14-bet).

Amerikalik olim D.Poya o'zining «Как решат задачу» nomli kitobida evristik ta'lim metodini bunday tushuntiradi: «Evristikaning maqsadi – yangiliklarga olib boruvchi metod va qoidalarni izlash demakdir». U evristik metod mohiyatini quyidagidek izchillikda tuzilgan reja orqali amalga oshirishni tavsiya qiladi:

1. Masalaning qo'yilishini tushunish.
2. Masalani yechish rejasini tuzish.
3. Tuzilgan rejasini amalga oshirish.
4. Orqaga nazar tashlash (hosil qilingan yechimni tekshirish).

Bu rejani amalga oshirish jarayonida o'quvchilar quyidagi savollarga javob topadilar:

1. Masalada nimalar noma'lum?
2. Masalada nimalar ma'lum?
3. Masalaning sharti nimalardan iborat?
4. Ilgari shunga o'xshash masala yechilganmi?
5. Agar shunga o'xshash masala yechilgan bo'lsa, undan foydalanib qo'yilayotgan masalani yecha olamizmi?

Albatta, yuqoridagi reja-sxema o'quvchilarning ijodiy fikrlash faoliyatlarini shakllantiradi, ammo bu reja-sxema o'quvchilarning ijodiy qobiliyatlarini shakllantiruvchi birdan-bir yo'l bo'la olmaydi.

Matematik-metodist V.V. Repev evristik metod orqali o'qitishni bunday ta'riflaydi: «Bu metodning mohiyati shundan iboratki, o'qituvchi tomonidan sinf o'quvchilari uchun o'tiladigan mavzu materialining mazmuni muammo qilib qo'yiladi, so'ngra maqsadga tomon yo'naltiruvchi savollar sistemasini o'quvchilarga berish orqali qo'yilgan muammoni hal qilinadi. (Репьев В. В. «Общая методика математики», M., 1958-y., 149-bet).

Endi yuqorida aytilgan fikrlarning dalili sifatida quyidagi tenglama va masalani evristik ta'lim metodi bilan yechib ko'rsatamiz.

1. Ushbu $|x^2-3x-9|=-5$ tenglamani evristik metod bilan yeching.

Bu tenglamani evristik metod bilan yechishda o'qituvchi bilan o'quvchilar orasidagi suhbat keltiriladi, bu ta'lim jarayonidagi evristik metod mohiyatini ochib beradi:

O'qituvchi. $|x^2-3x-9|=-5$ tenglama qanday yechiladi?

O'quvchi. Bu tenglamani yechish uchun uning $x^2-3x-9=-5$ va $-x^2+3x+9=-5$ tenglamalar ko'rinishida yozib olinadi.

O'qituvchi: $x^2-3x-9=-5$ va $-x^2+3x+9=-5$ tenglamalarni qanday qoidaga asoslanib yozdingiz?

Agar bizga $|a|$ soni berilgan bo'lsa, u quyidagiga teng edi:

$$|a|=\begin{cases} a, & a>0, \\ -a, & a<0. \end{cases}$$

O'qituvchi. Xo'sh, u holda hosil qilingan tenglamalar qanday yechiladi?

O'quvchi.

$$x^2-3x-9=-5,$$

$$x^2-3x-9+5=0,$$

$$x^2-3x-4=0.$$

O'qituvchi. $x^2-3x-4=0$ tenglama qaysi formuladan foydalanib yechiladi.

O'quvchi. $x^2-3x-4=0$ tenglama $x^2+px+q=0$ ko'rinishga keladi, bu keltirilgan kvadrat tenglamadir.

O'qituvchi. Kim aytadi, $x^2+px+q=0$ tenglamaning umumiy yechimi qanday bo'lar edi?

O‘quvchi. $x^2+px+q=0$ tenglamaning yechimi $x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ bo‘lar edi.

O‘qituvchi. $x^2-3x-4=0$ tenglamani bu formulaga qanday qilib qo‘yamiz?

O‘quvchi. $x^2-3x-4=0$ tenglamada $p=-3$ va $q=-4$ ga teng, biz ularni umumiy yechimga qo‘ysak, berilgan tenglamaning yechimini topgan bo‘lamiz:

$$x_{1,2}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-4}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{3}{2}\pm\frac{5}{2}.$$

O‘qituvchi. $-x^2+3x+9=-5$ tenglama qanday yechiladi?

O‘quvchi. $-x^2+3x+9+5=0$.

O‘qituvchi. Endi nima qilamiz?

O‘quvchi. O‘xshash hadlari ixchamlanadi $-x^2+3x+14=0$.

O‘qituvchi. Noma’lum x oldidan manfiy ishorani musbat qilish uchun nima qilinadi?

O‘quvchi. Tenglikning har ikkala tomoni (-1) ga ko‘paytiriladi:

$$-x^2+3x+14=0\cdot(-1), \qquad x^2-3x-4=0.$$

Bu tenglama ham yuqoridagi kabi yechiladi:

$$x_{1,2}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+14}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{65}{4}}=\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{65}}{4};$$

$$x_1=\frac{3+\sqrt{65}}{2}; \quad x_2=\frac{3-\sqrt{65}}{2}.$$

II. Endi quyidagi masalani evristik metod bilan yechamiz.

Masala. Oralaridagi masofa 60 km bo‘lgan A nuqtadan B nuqtaga bir vaqtda ikki velosipedchi jo‘nadi. Ular bir vaqtda B punktga kelishlari kerak edi. Birinchi velosipedchi esa har soatda 2 km kam yurgani uchun bir soat kech keldi. Har bir velosipedchi soatiga necha km yurgan?

O‘qituvchi. Masalaning shartlari qanday? Unda nimalar berilgan? Masala shartida qanday kattaliklar qatnashmoqda?

O‘quvchilar. A va B punktlar orasidagi masofa 60 km ekani berilgan. Velosipedchilarning tezliklari orasidagi va ana shu masofalarini bosib o‘tishlari uchun ketgan vaqtlar orasidagi farqlar berilgan. Bu masala shartida harakat, masofa va vaqt kabi kattaliklar berilgan.

O'qituvchi. Masalada nimani topish kerak?

O'quvchilar. Masalada har qaysi velosipedchining tezligini topish so'ralmoqda.

O'qituvchi. Tezliklarni topish uchun qanday formulalardan foydalaniladi?

O'quvchilar. Bizga fizika kursidan ma'lum bo'lgan $s = \upsilon \cdot t$, $\upsilon = \frac{s}{t}$ formulalardan foydalaniladi.

O'qituvchi. Masalaning shartiga ko'ra nimani x bilan belgilanadi?

O'quvchilar. x km/soatni A punktdan B puntkga borayotgan velosipedchining tezligi deb olamiz.

O'qituvchi. Agar biz birinchi velosipedchining tezligini x desak, ikkinchi velosipedchining tezligini ana shu noma'lum orqali ifodalay olasizmi?

O'quvchilar. Ha, $(x-2)$ km/soat ikkinchi velosipedchining tezligi bo'ladi.

O'qituvchi. A punktdan B punktgacha bo'lgan masofani birinchi va ikkinchi velosipedchilar qancha vaqtda bosib o'tgan?

O'quvchilar. $\frac{60}{x}$ – soatda va $\frac{60}{x-2}$ soatda.

O'qituvchi. Bu velosipedchilarning 60 kmli masofani o'tishlari uchun ketgan vaqtlarni qanday tenglash mumkin?

O'quvchilar. $\frac{60}{x-2} - 1 = \frac{60}{x}$ tenglama orqali.

O'qituvchi. Bu tenglama qanday yechiladi?

O'quvchilar. Tenglama yechishning umumiy qoidasiga ko'ra:

$$60x + 120 - 60x = x^2 - 2x, \qquad x^2 - 2x - 120 = 0,$$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + 120} = 1 \pm 11.$$

$$x_1 = 12 \text{ km/soat}, \qquad x_2 = 10 \text{km/soat}.$$

11-§. Matematika darslarida muammoli ta'lim

Umumta'lim maktablari jamiyatning ijtimoiy-iqtisodiy va madaniy hayotdagi muhim o'zgarishlarga hamisha o'z munosabatini bildirib keldi. Jamiyat taraqqiyotining har bir davri uchun ta'lim nazariyasi rivojining ma'lum bir mazmuni mos keladi. Boshqacha aytganda, jamiyat taraqqiyotining har bir bosqichiga mos ravishda o'qitish dasturlarining mazmuni, tarbiya prinsiplari, o'quv-tarbiya jarayonini tashkil qilishning forma va metodlari hamda ta'lim muddatlari mos keladi. Pedagogika kursidan ma'lumki, ta'lim metodini aniqlashtirish jarayoni o'quvchi bilan o'qituvchining o'zaro munosabatlari prinsipidan kelib chiqadi, bunda o'qituvchi o'quvchilarga bilimlarni bayon qilishi, ana shu bilimlarga erishishdagi o'quvchilarning shaxsiy faoliyatlarini uyushtirishi hamda tushuntiriladigan mavzu materialini o'qituvchining o'zi qanday bayon qilish nuqtayi nazaridan yondashiladi.

Og'zaki ko'rsatmalik ta'lim jarayonida o'quvchilar o'qituvchining tushuntirishi orqali bilimlarni ongli ravishda o'zlashtiradilar hamda ularni amalda qo'llash malakalari hosil bo'ladi.

Asta-sekin umumta'lim maktablarining mazmuni tubdan o'zgartirildi, ya'ni ta'limni maktabning maqsad va vazifalariga mos keladigan yangi, ancha takomillashgan izohli-illyustrativ metodi vujudga keltirildi. Izohli-illyustrativ ta'limda o'rganilayotgan obyekt mohiyati izohlanadi, hayotiy dalillar bilan bog'lanadi hamda o'qituvchining ana shu o'rganilayotgan obyektga nisbatan ko'rsatadigan misol va xilma-xil ko'rgazmali qurollari orqali tasdiqlovchi xulosasi bilan yakunlanadi.

Izohli-illyustrativ ta'limda o'qituvchi dalillarni o'zi bayon qilib beradi, o'zi ularni tahlil qiladi va yangi tushunchalarning mohiyatini tushuntiradi, ya'ni teorema, qoida va qonunlarni o'zi ta'riflaydi.

Izohli-illyustrativ ta'lim metodi umumta'limiy maktablarimizda qo'llanish darajasiga nisbatan an'anaga aylandi va hozirda ham qo'llanilmoqda. Hozirgi zamon ilmiy-texnika taraqqiyoti davrida izohli-illyustrativ ta'lim metodi o'quvchilarning fikrlash qobiliyatini yetarli darajada rivojlantira olmaydi, ularni o'rganilayotgan mavzu materialini puxta bilishlariga bo'lgan ehtiyojlarini qanoatlantira olmaydi hamda fanga bo'lgan qiziqishlarini yuqori darajada shakllantira olmaydi. Shuning uchun ham 1960-yilning boshlaridan boshlab, maktablarimizda ta'lim jarayonini jadallashtirish g'oyasi keng tarqalib, ta'limning yangi metodi – *muammoli ta'lim metodi* vujudga kela boshladi.

Ta'lim metodlarining turini aniqlash o'quv jarayonini tashkil qilish prinsiplarini o'zigagina emas, balki aqliy faoliyat xarakteriga ham bog'liqdir, bu esa o'z navbatida fikrlashning reproduktiv va produktiv turlarini o'zaro qo'shib olib borish bilan belgilanadi. Izohli-illyustrativ ta'lim jarayonida barcha bilimlar, ko'nikmalar va malakalar o'zlashtirishning reproduktiv metodi asosida amalga oshiriladi, ya'ni o'quvchilar fanning tayyor natijalarini, tayyor faoliyat usullarini o'zlashtiradilar, bu esa ularda xotira va reproduktiv fikrlash malakalarini shakllantiradi. Faqatgina produktiv ijodiy fikrlash malakalari o'rganilgan nazariy mavzu materialiga bog'liq bo'lgan masala yoki misollarni yechish davomida egallanadi, xolos. Biroq reproduktiv fikrlash natijasida to'plangan ma'lum hajmdagi bilim va malakalar o'quvchilarning mustaqil bilish hamda ijodiy qobiliyatlarini rivojlantirish uchun yetarli bo'lmaydi. Shuning uchun ham ta'limning jadallashtirish g'oyasini har xil yo'nalishlari turli olimlar (M.A. Bankov, M.A. Danilov, M. Maxmutov, Yu.K. Babanskiy va boshqalar) tomonidan eksperiment qilinib ko'rildi va nazariy jihatidan isbotlandi.

O'tkazilgan eksperiment va kuzatishlar natijasida ta'lim jarayonida o'quvchilarning bilish faoliyatlarini jadallashtirish hamda ularning intellektual imkoniyatlaridan yuqori darajada foydalanish umumiy qonuniyatlari ishlab chiqildi. Bu qonuniyatlar quyidagilardan iborat:

1. O'rganilayotgan mavzu materiallari yuzasidan muammoli savollar sistemasini tuzish.

2. Tuzilgan muammoli savollar sistemasi asosida suhbat metodi orqali tushuntiriladigan mavzu materialini o'rgatish va uning tub mohiyatini ochib berish.

3. Muammoli savollar asosida izlanish xarakteridagi o'quv vazifalarini qo'yish.

Yuqoridagi bosqichlar asosida o'quv materiali tushuntirilganda o'quvchilar o'zlari darrov tushunib yetmaydigan fakt va tushunchalarga duch keladilar, natijada o'rganilayotgan mavzu materiali bilan o'quvchilar orasida muammoli vaziyat hosil bo'ladi.

Ta'rif. *O'rganilayotgan obyekt (bilishga doir nazariy material yoki masala) bilan o'rganuvchi subyekt (o'quvchi) orasidagi o'zaro harakatlarning o'ziga xos bo'lgan turiga muammoli vaziyat deyiladi.*

Muammoli vaziyat – bu o'quvchilarni o'rganilayotgan mavzu materialidagi fakt va tushunchalarning qanday hosil bo'lishini bilmaslikdan ham ana shu mavzu materialining tub mohiyatini olib beruvchi matematik tushuncha, aksioma va teoremalarni o'rganilayotgan mavzu materialiga tatbiq qila olmaslik paytida vujudga keladigan intellektual qiynalishdir.

Muammoli vaziyatning roli va ahamiyatini aniqlash o'quvchilarning tez fikrlash faoliyatini psixologik, pedagogik qonuniyatlarini hisobga olish asosida o'quv jarayonini qayta qurish muammoli ta'limning asosiy g'oyasini belgilab beradi. Muammoli ta'limda bilimning deyarli katta qismi o'quvchilarga tayyor holda berilmaydi, balki o'quvchilar tomonidan muammoli vaziyatlarni mustaqil hal qila bilish faoliyati jarayonida egallab olinadi.

Ta'rif. *Muammoli vaziyatlarni hal qilish asosida hosil qilingan dars jarayoni muammoli ta'lim deyiladi.*

Yuqoridagi mulohazalardan muammoli ta'lim nazariyasi o'quvchi intellektual imkoniyatlarini ochib beruvchi rivojlantiruvchi xarakterdagi ta'lim tashkil qilishning psixologik, pedagogik yo'llari va usullarini tushuntiradigan ta'lim jarayoni ekanligi ko'rinadi.

Muammoli ta'limda o'qituvchi faoliyati shundan iboratki, u zarur hollarda eng murakkab tushunchalar mazmunini tushuntira borib o'rganilayotgan mavzu materiali bilan o'quvchilar orasida muntazam ravishda muammoli vaziyatlarni vujudga keltiradi, o'quvchilarni faktlardan xabardor qiladi, natijada o'quvchilar bu dalillarni analiz qilish asosida mustaqil ravishda xulosa chiqaradilar va umumlashtiradilar, tushuncha, qoida va teoremalarni o'qituvchi yordamida aniqlab ifoda qilinishi yoki ma'lum bilimlarni yangi vaziyatlarda qo'llanishini o'rganadilar, natijada o'quvchilarda aqliy operatsiya va bilimlarni amaliyotda qo'llanish malakalari shakllanadi.

Maktab matematika kursida o'rganiladigan nazariy mavzu materiallari masala va misollarni ularning mazmuniga ko'ra muammoli hamda muammoli bo'lmagan turlarga ajratish mumkin.

Agar o'rganilayotgan mavzu materialidagi masala va misollarni yechish jarayoni o'quvchilar uchun yangi matematik tushuncha, dalil va qoidalarni o'z ichiga olgan bo'lib, avvalgi usul bilan yechish mumkin bo'lmasayu, yechishning yangi usullari talab etilsa, u holda bunday masala yoki misol mazmunan muammolidir, aksincha, shunday masala yoki misollar o'qituvchi tomonidan o'quvchilarga yechish uchun berilishi mumkinki, bunday masala va misollar o'quvchilar uchun muammoli bo'lmay qoladi, chunki ular masala va misol yechilishining yangi usullarini mustaqil izlanmasdan, o'qituvchining tushuntirishiga qarab o'zlashtirib oladilar, berilgan masala yoki misol faqatgina koeffitsiyentlari bilan avvalgilaridan farq qiladigan darajada bo'ladi.

1-misol. Masalan, boshlang'ich sinf o'quvchilariga quyidagi misollarni berish mumkin:

$$6 + 2 \cdot 3 = 24, \quad 6 + 2 \cdot 3 = 12.$$

Mazmuniga ko'ra bu masala muammoli bo'ladi, chunki bir xil toifadagi ikkita misol har xil natijaga ega bo'lyapti. Bas, shunday ekan, misollarni yechish usullari ham har xıl bo'lishi kerak. O'quvchilarga esa faqatgina bitta ketma-ket hisoblash usuli ma'lum, xolos. Ikkinchi usuli esa ular uchun noma'lumdir. Mana shu yerda muammoli vaziyat hosil bo'ladi. Yuqoridagi qo'yilgan misollarning ikkinchi sinfdagi yuqori o'zlashtiruvchi o'quvchilar tomonidan yechilishi mumkin. Agar o'qituvchi dastlab o'quvchilarga bir xil miqdorlardan tuzilgan misollarni turlicha usullar bilan yechish namunalarini ko'rsatgan bo'lsa edi, ular bu misollarni namunadan foydalanib yecha oladilar, natijada bu misollarni yechish jarayoni hech qanday muammoli vaziyatni hosil qilmaydi.

2-misol. Agar o'qituvchi $ax^2+bx+c=0$ to'la kvadrat tenglamaning umumiy $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ yechimini topib, unga doir $5x^2+7x+2=0$ misolni ko'rsatgandan so'ng, o'quvchilarga $6x^2+5x+1=0$ tenglamani yechinglar desa, bu holat o'quvchilar uchun muammoli vaziyatni hosil qilmaydi, chunki ular uchun bu misolni yechishga andaza bor. O'quvchilar bu misolni yechish jarayonida hech qanday yangı matematik qonun yoki qoidani ishlatmasdan avvalgi misoldagi koeffitsiyentlar o'rniga yangilarini qo'yadilar, xolos, bunda o'quvchilarning fikrlash qobiliyatlari shakllanmaydi.

3-misol. O'qituvchi kvadrat tenglama mavzusini o'tıb bo'lganidan keyin bikvadrat tenglamani o'tish jarayonida quyidagicha muammoli vaziyatlarni hosil qilishi mumkin.

O'qituvchi: $6x^2+5x^2+1=0$tenglamani qanday tenglama deb aytamiz?

O'quvchilar: 4-darajali tenglama deyiladi.

O'qituvchi: to'g'ri, shunday deyish ham mumkin, ammo matematikada shu ko'rinishdagi tenglamalarni *bikvadrat tenglama* deyiladi va uning umumiy ko'rinishi $ax^4+bx^2+c=0$ kabi bo'ladi. Xo'sh, bu ko'rinishdagi tenglamani qanday yechish mumkin?

O'quvchilar: Biz bunday tenglamalarni yechmaganmiz.

Mana shu yerda o'rganilayotgan mavzu materiali bilan o'quvchilar orasida bilishga doir muammoli vaziyat hosil bo'ladi.

O'qituvchi: $x^2=y$ deb belgilasak, x^4 ni qanday belgilaymiz?

O'quvchilar: mulohaza yuritish, ilgari o'tilganlari eslash orqali $x^2=y^2$ deb belgilash to'g'ri ekanligiga ishonch hosil qiladilar.

O'qituvchi: Bu tenglamani hozirgi belgilashlarga ko'ra qanday ko'rinishda yozish mumkin?

O'quvchidar: $6y^2-5y+1=0$.

O'qituvchi: bu hosil qilingan tenglamani qanday tenglama deyiladi?

O'quvchilar: to'la kvadrat tenglama deyiladi.

O'qituvchi: bu tenglamani qanday yechamiz?

O'quvchilar: to'la kvadrat tenglama umumiy yechimini topish formulasiga qo'yib topamiz:

$$y_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2 \cdot 6} = \frac{5 \pm 1}{12}; \quad y_1 = \frac{1}{2}; \quad y_2 = \frac{1}{3}.$$

O'qituvchi: biz hozir tenglamani yechib, qaysi noma'lumni topdik?

O'quvchilar: noma'lum y ni topdik.

O'qituvchi: nimani topish so'ralgan edi?

O'quvchilar: x ni topish so'ralgan edi.

O'qituvchi: x ni qanday topamiz?

Mana shu yerdagi noma'lum x ni topish jarayoni ham ko'pchilik o'quvchilar uchun muammoli vaziyatni hosil qiladi.

O'quvchilar noma'lum x ni o'zlari topishlari mumkin, bo'shroq o'quvchilarga o'qituvchi yordamlashadi:

$$x^2 = \frac{1}{2}; \qquad x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}};$$

$$x^2 = \frac{1}{3}; \qquad x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Demak, tenglama 4-darajali bo'lgani uchun biz 4 ta yechimini topdik. Bu misolni yechib bo'linganidan keyin $ax^4+bx^2+c=0$ bikvadrat tenglamaning umumiy yechimini o'qituvchi rahbarligida o'quvchilarning o'zlari topa oladilar:

$$x^2 = y, \qquad ay^2 - by + c = 0,$$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b \ -4ac}}{2a}, \qquad x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a}},$$

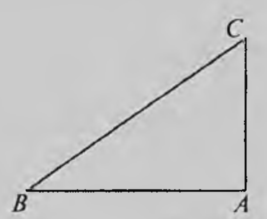
$$y_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$y_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \qquad x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

Shunday qilib, muammoli savol, muammoli masala – o'quv muammosining turli shaklda ifodalanishi bo'lib, bularning qo'llanishi muammoli vaziyat va o'quvchilarning izlanish faoliyatining yuzaga kelishiga olib keladi.

3- misol. Kosinuslar teoremasini o'rganish uchun o'qituvchi oldin o'quvchilar bilan birgalikda to'g'ri burchakli uchburchakning elementlaridan birortasini topishga doir bo'lgan masalalardan yechadi.

1- masala. ABC to'g'ri burchakli uchburchakda $\angle A=90°$, $|BC|=15sm$ va $|AB|=9$ *sm* bo'lsa, $|AC|$ – tomonining uzunligi topilsin (10-chizma).



10-chizma.

Berilgan: ΔABC, $\angle A=90°$, $|BC|=15$ *sm* va $|AB|=9$ *sm*.

Topish kerak: $|AC|$ – ?

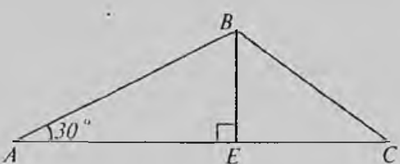
Yechish. Pifagor teoramesiga ko'ra:

$|BC|^2=|AB|^2+|AC|^2 \Rightarrow |AC|=\pm\sqrt{BC^2-AB^2} \Rightarrow |AC| =$

$= \sqrt{225-81} = \sqrt{144} = 12.$

$|AC|=12$ *sm*.

2-masala. ΔABC da $\angle A=30°$, $\angle B=90°$, $|AB|=2$ *sm*, $|AC|=\frac{4}{3}\sqrt{3}$ *sm* bo'lsa, $|BC|$ – ning uzunligini toping (11-chizma).



11-chizma.

Berilgan: ΔABC da $\angle A=30°$, $\angle B=90°$, $|AB|=2$ *sm*,

$|AC|= \frac{4}{3}\sqrt{3}$ *sm*

Topish kerak: BC – ?

Yechish. Chizmadan:

$$\Delta ABE \infty \Delta BEC, \quad \frac{AB}{AE}=\frac{AB}{BE}, \quad BE=\frac{AB}{2}=1 \ sm,$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{BC}{1}, \quad |BC|=\frac{2}{\sqrt{3}} \ sm.$$

Yechilgan bu masalalar muhokama qilingandan keyin o'quvchilar oldiga quyidagicha muammoli savol qo'yish mumkin. Agar ixtiyoriy uchburchakning ikki tomoni va ular orasidagi burchagi berilgan bo'lsa, uning uchinchi tomonini topish mumkinmi? Bu muammoli savolga javob topish bizni kosinuslar teoremasini o'rganishga olib keladi.

Takrorlash uchun savollar

1. *Matematik ta'lim metodlari qanday metodlarni o'z ichiga oladi?*
2. *Ilmiy izlanish metodlarining turlarini aytib bering.*
3. *Tajriba va kuzatish metodini tushuntiring.*
4. *Taqqoslash metodini aytib bering.*
5. *Analiz va sintez metodlarini ta'riflang.*
6. *Umumlashtirish metodini ta'riflang va uni matematika darslariga tatbiqini tushuntirib bering.*
7. *Tushunchani umumlashtirish deb nimaga aytiladi?*
8. *Teoremalarni umumlashtirishni tushuntirib bering.*
9. *Misol va masalalarni umumlashtirish qanday amalga oshiriladi?*
10. *Abstraksiyalash metodini tushuntirib bering.*
11. *Aniqlashtirish metodi deganda nimani tushunasiz?*
12. *Klassifikatsiyalash metodini aytib bering.*
13. *Qanday ta'lim metodiga evristik ta'lim deyiladi?*
14. *Muammoli vaziyat deb nimaga aytiladi?*
15. *Muammoli ta'lim deganda nimani tushunasiz?*
16. *Dasturlashtirilgan ta'limni tushuntirib bering.*
17. *Sonlar ketma-ketligi deb qanday to'plamga aytiladi?*
18. *Qanday sonlar ketma-ketligi arifmetik progressiya deyiladi?*

Tayanch iboralar

Ta'lim metodi, ilmiy-izlanish metodi, tajriba metodi, kuzatish metodi, taqqoslash metodi, analiz metodi, sintez metodi, umumlashtirish metodi, tushunchani umumlashtirish, teoremani umumlashtirish, misollarni umumlashtirish masalalarni umumlashtirish, abstraksiyalash metodi, klassifikatsiyalash metodi, evristik ta'lim, muammoli ta'lim, dasturlashtirilgan ta'lim, sonlar ketma-ketligi, arifmetik progressiya, o'qituvchining faoliyati, o'quvchilarning faoliyati.

IV bob
O'QUVCHILARNING MATEMATIK TAFAKKURLARINI SHAKLLANTIRISH METODIKASI

1-§. Matematik ta'lim jarayonida masalaning roli va o'rni

Matematik ta'lim jarayonida masalalardan foydalanish qadim zamonlardan beri qo'llanib kelinmoqda. Shuning uchun ham matematika darslarida matematik masalaning roli va uning o'rni haqida gap borganda quyidagi uch bosqichni ko'zda tutish maqsadga muvofiqdir.

1. Matematika fanining nazariy qismlarini o'rganish matematik masalalarni yechish maqsadida amalga oshiriladi.

2. Matematika fanini o'rgatish matematik masalalarni yechish bilan birgalikda olib boriladi.

3. Matematikani o'rganish masala yoki misollar yechish orqali amalga oshiriladi.

Aytilganlardan ko'rinadiki, jamiyat rivojlanishining har bir bosqichida masalaning roli va uning o'rniga har xil baho berib kelingan.

1966-yili xalqaro matematiklar simpoziumida matematik masala va misollarni yechish o'quvchilarning faqatgina matematik faoliyatlarini shakllantiribgina qolmay, balki ana shu fanga doir bilimlarni o'zlashtirish va uni amaliyotga tatbiq qilishga ham xizmat qiladi, deyiladi.

Aytilgan har bir bosqichni aniq mavzu materiallari asosida ko'rib chiqamiz.

1. Darsda «*Ikki burchak yig'indisining sinusi*» nomli mavzuni o'quvchilarga tushuntirsak, ular chiqarilgan natijaviy formuladan foydalanib mavzu materialiga doir misollarni yecha oladilar (12-chizma).

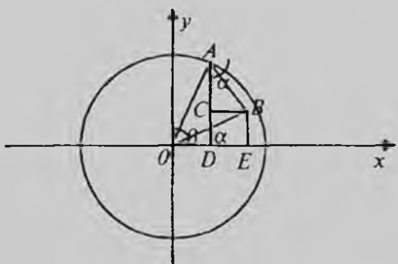
Berilgan: C – aylana, $[AB] \perp OB$, $OA=R=1$, $\angle EOB=\alpha$, $\angle BOA=\beta$, $\angle DOA=\alpha+\beta$

I s b o t q i l i s h k e r a k : $\sin(\alpha+\beta) = ?$ (12-chizma).

Isbot:

$$\triangle OAD \Rightarrow \left(\frac{AD}{OA} = \sin(\alpha+\beta)\right).$$

$OA = 1$ bo'lgani uchun $\sin(\alpha+\beta) = AD = CD + CA$. (1)



12-chizma.

Chizmadan: $CD = EB$, chunki bular o'zaro paralell to'g'ri chiziqlar orasidagi kesmalar

$$\Delta OBE \Rightarrow \left(\frac{EB}{OB} = \sin\alpha\right) \Rightarrow (EB = OB\sin\alpha)' \qquad (2)$$

$$\Delta OAB \Rightarrow \left(\frac{OB}{OA} = \cos\beta\right) \Rightarrow (OB = OA\cos\beta) \Rightarrow (OB = \cos\beta) \qquad (3)$$

(3) ni (2) ga qo'ysak $EB = \sin\alpha \cdot \cos\beta$. (4)

$$\Delta ACB \Rightarrow \left(\frac{AC}{AB} = \cos\alpha\right) \Rightarrow (AC = AB\cos\alpha). \qquad (5)$$

$$\Delta OAB \Rightarrow \left(\frac{AB}{OA} = \sin\beta\right) \Rightarrow (AB = OB\sin\beta). \qquad (6)$$

(6) ni (5) ga qo'ysak:

$$AC = \cos\alpha \ \sin\beta. \qquad (7)$$

(4) va (7) larni (1) ga qo'ysak,

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \ \cos\beta$ bo'ladi.

Misol. $\sin 75° = \sin(30°+45°) = \sin 30° \cdot \cos 45° + \cos 30° \cdot \sin 45° =$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}.$$

Demak, $\sin 75° = \dfrac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}$.

Hisoblang: $\sin 135° = ?$ $\cos 150° = ?$

2. Matematik tushunchalarni o'rganish matematik misol va masalalarni yechish bilan birgalikda olib boriladi, chunki o'qituvchi yangi o'rganiladigan matematik tushunchaning ta'rifini bergandan keyin uning analitik ifodasini yozadi. Masalan $a^x=b$, $a \neq 1$ ko'rinishdagi tenglamaga ***ko'rsatkichli tenglama*** deyiladi deb ta'riflangandan so'ng, quyidagi ko'rinishdagi ko'rsatkichli tenglamani ifodalovchi misollarni ko'rsatish mumkin: $3^x = 27$; $2^x = 16$; $5^x = 125$; ...

O'qituvchi $ax=b$ ko'rinishdagi tenglamaning yechimini geometrik nuqtayi nazardan ko'rsatib berishi maqsadga muvofiqdir. O'qituvchi o'quvchilarga, agar koordinatalar tekisligida ikki funksiya grafigi o'zaro kesishsa, ular kesishish nuqtasining absissasi ana shu funksiyalarni tenglash natijasida hosil qilingan tenglamaning yechimi bo'lishini takrorlagandan so'ng $a^x=b$ tenglamani ham $y=a^x$ ва $y=b$ ko'rinishlarda yozib, ularning har birining grafigini chizib, bu grafiklarning kesishish nuqtasining absissasini $x=\log_a b$ deb belgilash qabul qilinganligini tushuntirishi lozim. Bundan ko'rinadiki, $a_x=b$ tenglamaning yechimi $x=\log_a b$ bo'lar ekan. $(3^x=27) \to (x = \log_3 27) = =\log_3 3^3 = 3\log_3 3 = 3$.

Ko'rsatkichli tenglamalarning barchasi ayniy algebraik almashtirishlar yordamida soddalashtirilib, $a^x=b$ ko'rinishga keltiriladi, so'ngra bundan, x noma'lum $x=\log_a b$ ko'rinishda topiladi.

1-misol.

$$5^{x-1}+5^{x-2}+5^{x-3}=155, \quad 5^x\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}\right)=155,$$

$$5^x\left(\frac{25+5+1}{125}\right)=155, \qquad 5^x\cdot 31=155\cdot 125.$$

$$5^x\cdot 31=31\cdot 5\cdot 5^3, \qquad 5^x=5^4, \qquad x=4.$$

2-misol.

$$4^{\sqrt{x-2}}+16=10\cdot 2^{\sqrt{x-2}}, \qquad \left(2^{\sqrt{x-2}}\right)^2+16-10\cdot 2^{\sqrt{x-2}}=0$$

$2^{\sqrt{x-2}}=y$ desak, $\qquad y^2-10y+16=0.$

$$y_{1,2}=-5\pm\sqrt{25-16}=5\pm 3, \qquad y_1=8;\ y_2=2.$$

1) $2^{\sqrt{x-2}}=8$, $\qquad$ 2) $2^{\sqrt{x-2}}=2$,

$2^{\sqrt{x-2}}=2^3$, $\qquad \sqrt{x-2}=1$,

$\sqrt{x-2}=3$, $\qquad x-2=1$,

$x-2=3^2$, $\qquad x_2=3. \qquad x_1=11.$

Misollar

1) $2^x\cdot 5^x=0,1(10^{x-1})^5$. $\qquad$ 3) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2+2x-5}=25$.

2) $3^{x^2-x-2}=81$. $\qquad$ 4) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}-\left(\frac{1}{5}\right)^{x+1}=4,8$.

3. Hozirgi davrda masala yoki misollar yechish orqali matematik ta'lim jarayonini olib borishning metodik usul va vositalari ishlab chiqilgan hamda bu usullar haqida ko'pgina ilmiy metodik va didaktik adabiyotlarda bayon qilingan. Matematik tushunchani masala yoki misollar yordamida kiritish

va uning tub mohiyatini o'quvchilarga tushuntirish murakkab bo'lgan pedagogik jarayondir. Shuning uchun ham bir maktab o'qituvchisi dars jarayonida ishlatiladigan masalani tanlash yoki uni tuzishda juda ham ehtiyot bo'lmog'i lozimdir. Tuzilgan masalalarni dars jarayonida qo'llanish ana shu o'quvchilarning o'zlashtirish qobiliyatlarini hisobga olgan holda bo'lishi kerak. Har bir dars jarayonida ishlatiladigan masala yoki misol darsning maqsadiga mos kelishi kerak.

Agar darsda o'qituvchi o'quvchilarga biror yangi matematik tushunchani o'rgatmoqchi bo'lsa, tuziladigan masala yoki misol ana shu tushuncha mohiyatini ochib beruvchi xarakterda bo'lishi kerak.

Masalan, $y=a^x$, $a\neq 1$ ko'rsatkichli funksiyaning grafigi nomli mavzuni o'tishdan oldin o'qituvchi $y=2^x$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=3^x$ kabi xususiy holdagi ko'rsatkichli funksiyalarga doir bo'lgan misollarning grafiklarini Dekart koordinatalar sistemasida o'quvchilar bilan savol-javob asosida chizib ko'rsatish maqsadga muvofiqdir.

a ning xususiy qiymatiga nisbatan chizilgan grafiklardan o'quvchilar o'qituvchi bilan birgalikda $y=a^x$ ko'rinishdagi funksiyaning grafigi va uning xossalari haqida umumiy xulosalarni keltirib chiqara oladilar. Bu yerda darsni tushuntirish metodikasi xususiylikdan umumiylikka tomon bo'lib, bunda o'quvchilar har bir tushunchaniтп mohiyatini anglab yetadilar.

2-§. Matematika o'qitishda masalalarning bajaradigan funksiyalari

Hozirgi zamon didaktikasida A.D. Semushin, K.I. Neshkov va Yu.M. Kolyagin, J. Ikromov, T.To'laganov va N. G'aybullayev kabi metodist matematiklar matematika kursidagi masala va misollarning bajaradigan funksiyasini quyidagicha turlarga ajratishadi:

1. Masalaning ta'limiy funksiyasi.
2. Masalaning tarbiyaviy funksiyasi.
3. Masalaning rivojlantiruvchi xarakterdagi funksiyasi.
4. Masalaning tekshiruv xarakterdagi funksiyasi.

Masalaning matematika darsi jarayonida bajaradigan funksiyalarini alohida-alohida ko'rib chiqamiz.

1. Masalaning ta'limiy funksiyasi asosan maktab matematika kursida o'rganilgan nazariy ma'lumot, matematik tushuncha, aksioma, teorema va matematik xulosalar, qonun-qoidalarning aniq masala yoki misollarga tatbiqi natijasida o'quvchilarda mustahkam matematik bilim va malakalar hosil qilish orqali amalga oshiriladi.

O'qituvchi ikki burchak yig'indisi va ayirmasining sinusi teoremasini o'tib bo'lganidan keyin, ana shu mavzu materialini o'quvchilar ongida mustahkamlash uchun quyidagicha misollarni yechish mumkin.

1-misol. Ayniyatni isbotlang:

$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\sin\alpha.$$

Bu yerda o'qituvchi o'quvchilarga ayniyat tushunchasining mohiyatini takrorlab berishi lozim:

$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{6}+\cos\alpha\cdot\sin\frac{\pi}{6}+$$

$$+\sin\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{6}-\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{6}=2\sin\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{6}=$$

$$=2\sin\alpha\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\sin\alpha.$$

2- misol. Ayniyatni isbotlang:

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}=tg\alpha+tg\beta.$$

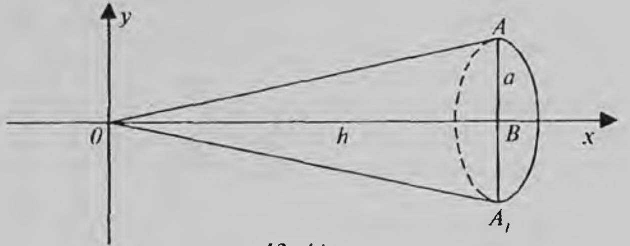
$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\beta\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}=$$

$$=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1}=tg\alpha+tg\beta.$$

Maktab matematika kursidagi masala yoki misollarni yechish o'quvchilarda matematik malaka va ko'nikmalarni shakllantiribgina qolmay, balki olingan nazariy bilimlarni amaliyotga tatbiq qila olishini ham ko'rsatadi. Agar o'qituvchi kvadrat tenglama mavzusini o'tib, uni mustahkamlash jarayonida kvadrat tenglamaga keltiriladigan masalalarni yechib ko'rsatsa, o'quvchilarni ana shu mavzu materiali yuzasidan bilimlari mustahkamlanadi hamda kvadrat tenglama tushunchasining tatbiqi haqidagi fikr o'quvchilar ongida shakllanadi.

1- masala. Balandligi h va asosining uzunligi a ga teng bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchakning Ox o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan to'g'ri doiraviy konusning hajmining hisoblang (13-chizma).

Berilgan: $OB = h, \quad AB = a$



13-chizma.

Topish kerak: $V = ?$

Yechish. $V = \pi \int_a^b y^2 dx$

Cizmadan:

$$y = OA = tg\alpha \cdot x = \frac{a}{h} x,$$

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b \frac{a^2}{h^2} \cdot x^2 dx = \pi \cdot \frac{a^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h =$$

$$= \pi \frac{a^2}{h^2} \frac{h^3}{3} \cdot \frac{\pi a^2 h}{3} = \frac{1}{3} \pi a^2 \; h; \quad a^2 = r^2; \; \pi r^2 = S$$

bo'lgani uchun $V = \frac{1}{3} S\pi.$

Agar o'qituvchi geometriya darsida konusning hajmi mavzusini o'tib, unga doir misollarni integral tushunchasidan foydalanib yechib ko'rsatsa o'quvchilar algebra bilan geometriya fanlari orasidagi mantiqiy bog'lanishni ko'radilar hamda ularda fazoviy tasavvur qilish faoliyati yanada shakllanadi.

2. Masalaning tarbiyaviy funksiyasi o'quvchilarda ilmiy dunyoqarashni shakllantiradi hamda ularni mehnatga muhabbat ruhida tarbiyalaydi. Bizga ma'lumki, matematika fanining o'rganadigan obyekti materiyadagi narsalarning fazoviy formalari va ular orasidagi miqdoriy munosabatlarni o'rganishdan iboratdir. Bas, shunday ekan, fazoviy forma bilan miqdoriy munosabatlar orasidagi bog'lanish analitik ifodalangan formula bilan yoziladi.

Ana shu formulani kundalik hayotimizdagi elementar masalalarni yechishga tatbiqi o'quvchilarda ilmiy dunyoqarashni shakllantiradi. Albatta o'qituvchi bu yerda bilish nazariyasiga asoslangan bo'lishi kerak. «Jonli mushohadadan abstrakt tafakkurga va undan amaliyotga borish kerak».

O'qituvchi matematika darsida yechiladigan masalalar orqali o'quvchilarni mehnatga muhabbat ruhida tarbiyalashi lozim. Buning uchun o'qituvchi halol va sifatli mehnatni ulug'laydigan masalalarni tanlashi kerak bo'ladi.

1- masala. Ikki ishchi ma'lum muddatda 120 ta detal tayyorlashi kerak edi. Ishchilardan biri ikkinchisiga qaraganda soatiga 2 tadan ortiq detal tayyorlab topshiriqni 5 soat oldin bajardi. Har bir ishchi soatiga nechtadan detal tayyorlagan?

x — birinchi ishchi ishlagan vaqti,

$(x - 5)$ — ikkinchi ishchi ishlagan vaqti.

$\frac{120}{x}$ — birinchi ishchi tayyorlagan detallar soni,

$\frac{120}{x-5}$ — ikkinchi ishchi tayyorlagan detallar soni.

Yuqoridagilarga asoslanib quyidagi tenglamani tuzishimiz mumkin.

$$\frac{120}{x} = \frac{120}{x-5} - 2, \qquad \frac{120}{x-5} - \frac{120}{x} = 2,$$

$$120x - 120x + 600 = 2x^2 - 10x, \qquad 2x^2 - 10x - 600 = 0 \quad \text{yoki}$$

$$x^2 - 5x - 300 = 0, \qquad x_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 300} = \frac{5}{2} \pm \frac{35}{2}$$

$$x_1 = \frac{40}{2} = 20; \qquad x_2 = -15.$$

Bulardan 1-ishchi 20 soat, ikkinchisi esa 15 soat ishlaganligi kelib chiqadi.

$\frac{120}{20} = 6$ ta 1-ishchining 1 soatda tayyorlagan detallar soni.

$\frac{120}{15} = 8$ ta 2-ishchining 1 soatda tayyorlagan detallar soni.

Masalani yechib bo'lgandan keyin o'qituvchi masala mohiyatini quyidagi tartibda tushuntirishi mumkin. Agar biror kishi biror topshirilgan ishni ortig'i bilan bajarsa, uning mehnat unumi ortib, unga to'laydigan haq ham ortib boradi. Bu esa o'quvchilarni halol mehnatga muhabbat ruhida tarbiyalaydi.

3. Masalaning rivojlantiruvchi xarakterdagi funksiyasi o'quvchilarni mantiqiy tafakkur qilish faoliyatlarini shakllantiradi. Bizga psixologiya kursidan ma'lumki, o'quvchilarning mantiqiy tafakkur qilish faoliyatlari tafakkur

operatsiyalari (taqqoslash, analiz – sintez, umumlashtirish, aniqlashtirish, abstraksiyalash va klassifikatsiyalash) orqali amalga oshiriladi. Maktab matematika kursidagi masalaning rivojlantiruvchi xarakterdagi funksiyasi o‘quvchilarni matematika o‘qitish metodikasining metodlaridan masala yoki misollarni yechish jarayonida to‘g‘ri foydalanish malakalarini rivojlantiribgina qolmay, balki ularni biror matematik hukm va xulosalar to‘g‘risida aniq fikr yuritish imkoniyatlarini shakllantiradi hamda masalalar yechish qobiliyatlarini rivojlantiradi.

4. Masalaning tekshiruv xarakterdagi funksiyasi o‘z ichiga quyidagilarni oladi:

1) O‘quvchilarning nazariy olgan bilimlari darajasi;

2) O‘quvchilarning nazarıy olgan bilimlarini amaliy xarakterdagi misol va masalalar yechishga tatbiq qilishi;

3) matematik hukmlardan xulosalar chiqarish darajalari;

4) O‘quvchilarning matematik tafakkur qobiliyatlarini rivojlanish darajasi.

Endi bitta masala olib, ana shu masala yordamida yuqorida aytib o‘tilgan funksiyalarning bajarilishini ko‘rib chıqamiz.

Masala. Radiusi r ga teng bo‘lgan doiraning yuzini integral yordamida hisoblang (14-chizma).

Berilgan: S – aylana. $OA = r$.

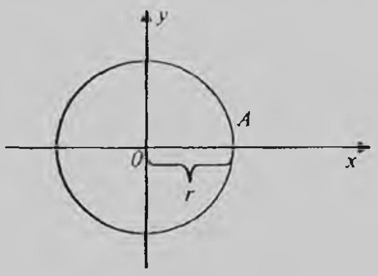
Topish kerak: $S = ?$

Yechish. $x^2+y^2= R^2$ aylana tenglamasidan $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$ ni yozib olamiz. Yuzalarni integral yordamida hisoblash formulasi $S = \int_b^a f(x)dx$ edi. Shuning uchun

$$S = 4\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,dx \qquad (1)$$

$$x = R\sin t,\ \ x = 0,\ \ t = 0,$$

$$dx = R\cos t dt,\ \ x = R,\ \ t = \frac{\pi}{2}.$$



14-chizma.

Bu almashtirishlarni (1) ga qo‘ysak, u quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 - R^2\sin^2 t}\cdot R\cos t dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2\sqrt{1 - \sin^2 t}\cos t dt =$$

$$= 4R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cos t dt = 4R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 4R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt =$$

$$= 4R^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2t}{2} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4R^2 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \pi}{2} \right)^2 = 4R^2 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi R^2.$$

$$S = \pi R^2.$$

1) Bu masalani yechish jarayonida o'quvchilarda integral yordamida yuzalarni hisoblash mumkin, degan tushuncha shakllanadi, bu esa ana shu masalani yechishdagi asosiy ta'limiy funksıya bo'lib hisoblanadi.

2) Bu masalanıng tarbıyaviy funksiyasi esa shundan iboratki, o'quvchilarda bu masalani yechishga bo'lgan qiziqish shakllanadi, chunki ular integral yordamisiz doiraning yuzi nimaga teng ekanini biladilar, integral yordamida hisoblaganda ham uning yuzi $S=\pi R^2$ ekanini kelib chiqishi o'quvchilarni shu fanga bo'lgan hamda uning turli metodlariga bo'lgan qiziqishlarini orttiradi.

3) Bu masalaning rivojlantiruvchi xarakterdagi funksiyasi esa masalaning yechish jarayonida hosil bo'lgan muammolarni hal qilishning matematik qonuniyatlarini o'rgatadi, o'quvchilarda matematik tafakkurni shakllantiradi.

4) Bu masalaning amaliy ahamiyati esa shundaki, bunda o'quvchilarning masalanı yechish imkoniyatiga qarab ularning olgan nazariy bilimlarining darajasi aniqlanadi.

3-§. Matematika darslarida didaktik prinsiplar

Ma'lumki, didaktik prinsiplar ta'lim nazariyasining asosini tashkil qiladi. Shuning uchun ham o'quv materialini tushuntirish metodlarini tanlashda ta'lim nazariyasi tomonidan ishlab chiqilgan quyidagi didaktik prinsiplarga amal qilish kerak.

1. Ilmiylik prinsipi. Bu prinsipning mohiyati shundan iboratki, maktab matematika kursida o'tiladigan har bir mavzu materiali nazariy jihatdan isbotlangan, ya'ni avvalgi o'tilgan matematik tushuncha, aksioma va teoremalarga asoslangan holda bayon qilinishi lozim. Ilmiylik prinsipi matematika darsining har bir qadamida kerakbo'ladi, masalan, o'qituvchi o'quvchilarga $x^2 + 1$ tenglamani yeching desa, qo'yilgan bu savol to'la ilmiy asosga ega bo'lmaydi, chunki o'quvchilar bu tenglamani haqiqiy sonlar to'plamiga nisbatan yechadigan bo'lsalar, u yechimga ega emas, agar ular bu tenglamani kompleks sonlar to'plamiga nisbatan yechadigan bo'lsalar, u ikkita har xil yechimga ega bo'ladi. Shuning uchun ham matematika darslarida ilmiylik prinsipi quyidagi talablarga javob berishi kerak:

1) o'rganilayotgan har bir matematik tushuncha, ta'rif, aksioma va teoremalar bayon qilinishi jihatidan sodda va aniq ifodalangan bo'lishi kerak;

2) matematika darslarida o'rganiladigan har bir mavzu materialiga nisbatan o'quvchilarni tanqidiy qarashga o'rgatish hamda ularni ana shu nuqtayi nazardan ilmiy fikrlash qobiliyatlarini shakllantirish.

Ana shu nuqtayi nazardan ilmiylik prinsipi maktab matematika kursida o'rganiladigan dalillarni ular fanda qanday yoritiladigan bo'lsa, shunga moslab yoritishni talab etadi.

2. **Ko'rsatmalilik prinsipi.** Ko'rsatmalilik prinsipi o'quvchilar tafakkurining aniqlikdan abstraktlikka qarab rivojlanish xususiyatlariga bog'liqdir. Matematikani o'qitishdan asosiy maqsad mantiqiy tafakkurni rivojlantirishdan iboratdir, biroq matematikani o'qitish aniq dalil va obrazlardan ajralmasdir, aksincha, har qanday masalani o'rganishni shu aniq dalil va obrazlarni tekshirishdan boshlash kerak bo'ladi. Ko'rsatmalilik ilmiy bilishlarga qiziqishni oshiradi, o'quv materialini o'zlashtirishni osonlashtiradi va matematik bilimlarni mustahkam bo'lishiga yordamlashadi.

3. **Onglilik prinsipi.** Onglilik prinsipi o'quvchilarning o'quv materialini ongli ravishda o'zlashtirishga, ya'ni ularni turli dalillarni tushuna bilishga hamda bu dalillar orasidagi bog'lanishlarni va qonuniyatlarni ocha bilishga o'rgatishdan iboratdir. Matematikani o'qitishda bu prinsipning muhimligi shundan iboratki, matematikadan olinadigan bilimlar faqat ongli ravishda o'zlashtirilgandagina o'quvchilar miqdoriy munosabatlarning xarakterini, matematik figura va ularning o'zaro joylanish xususiyatlarini bilib oladilar. Agar onglilik prinsipi mavzu materialini o'zlashtirish jarayonida buzilsa, o'quvchilarning oladigan bilimlari yuzaki bilim bo'lib qoladi. O'quvchilardagi yuzaki bilimlarni quyidagi hollarda ko'rishimiz mumkin:

1. Agar biror o'quvchiga funksiyaning grafigini chiz deb aytilsa, u koordinata tekisligida ana shu grafikning umumiy ko'rinishini chizishi, ammo funksiyaning argument qiymatlariga mos qiymatlarni topib bera olmasligi mumkin.

2. O'quvchi miqdorlarning absolut qiymati ta'rifini biladiyu, ammo uni $|x| = 5$ tenglamaga yoki $|x|<5$ tengsizlikka tatbiq qila olmasligi mumkin.

4. Aktivlik prinsipi. Bu prinsipning mohiyati shundan iboratki, bunda maktab matematika kursidagi ta'limning har bir bosqichi rivojlantiruvchi xarakterdagi ta'lim asosiga qurilgan bo'lishi kerak, bu esa o'quvchilarning aktiv fikrlash faoliyatlarini shakllantirishga xizmat qiladi. Matematika darslarida o'quvchilarning aktiv fikrlash faoliyatlarisiz bilimlarni ongli ravishda o'zlashtirishlariga erishib bo'lmaydi, shuning uchun ham hozirgi zamon maktab matematika kursining asosiy maqsadi o'quvchilarning matematika darslarida aktiv fikrlash faoliyatlarini shakllantirishdan iboratdir.

O'quvchilarning matematika darslarida aktiv, ongli fikrlash faoliyatlarini hosil qilish uchun mavzu materialini dars jarayonida muammoli vaziyatlar hosil qilish asosida o'tish maqsadga muvofiqdir.

5. Puxta o'zlashtirish prinsipi. Puxta o'zlashtirish prinsipi matematik materiallarni puxta o'zlashtirishga erishishda ayniqsa katta ahamiyatga egadir. Matematik tushunchalar o'zaro shunday bog'langanki, majburiy minimumning biror qisminigina bilmagan taqdirda ham o'quvchilar o'z bilimlaridan turmushda foydalana olmay qoladilar. Matematikada hisoblash, algebraik ifodalarni ayniy almashtipish, geometrik figuralarni tasvirlash malakalarini puxta egallashning ahamiyati kattadir. Ayniqsa matematikada boshqa fanlardagiga qaraganda ham, dasturning biror qismini yaxshi o'zlashtirmasdan va malakani yaxshi mustahkamlamasdan turib muvaffaqiyat bilan oldinga siljish mumkin emas. Yuqoridagilardan ko'rinadiki, o'quvchilarning matematika fanidan oladigan bilimlari puxta bo'lishi uchun quyidagi shartlari bajarilishi zarur.

1. O'quvchilarning matematikaga qiziqishlarini shakllantirish.
2. Tushuntirilgan mavzu materialini o'quvchilarning mantiqiy asosda o'zlashtirishlariga erishish.
3. Matematika darslari davomida o'quvchilarning mantiqiy fikrlash faoliyatlarini hosil qilib borish.

6. Sistemalik prinsipi. Matematika darslarida sistemalik prinsipi shundan iboratki, bunda o'qitishni shu fanning sistemasiga moslab olib borish talab etiladi.

Takrorlash uchun savollar

1. *Matematik tafakkur deganda nimani tushunasiz?*
2. *Matematika darslarida masalaning rolini tushuntirib bering.*
3. *Masalaning ta'limiy funksiyasi nimalardan iborat bo'ladi?*
4. *Masalaning tarbiyaviy funksiyasichi?*
5. *Masalaning rivojlantiruvchi funksiyasini aytib bering.*

6. *Masalani tekshiruv xarakterdagi funksiyasini tushuntirib bering.*
7. *O'quvchilarning matematik qobiliyatlari qanday shaklantiriladi?*
8. *Matematik hukmning qanday turlari mavjud?*
9. *Matematik hukmlar qanday tushunchalar ko'rinishida ifoda qilinadi?*
10. *Birhad deb qanday ifodaga aytiladi?*
11. *Ko'phad tushunchasini aytib bering.*
12. *Ko'phadlar qanday usullar yordamida ko'paytuvchilarga ajratiladi?*
13. *Ko'paytuvchilarga ajratishning guruhlash metodiga misollar keltiring.*
14. *Qo'shimcha hadlar kiritish orqali ko'phad qanday qilib ko'paytuvchilarga ajratiladi?*
15. *Ko'phadning ildizlariga ko'ra ko'paytuvchilarga ajratilishini tushuntirib bering.*
16. *Ko'phadni noma'lum koeffitsiyentlar orqali ko'paytuvchilarga ajratish qanday amalga oshiriladi?*
17. *Matematika darslarida didaktik prinsiplar va ularning matematika darslariga tatbiqini tushuntirib bering.*

Tayanch iboralar

Matematik tafakkur, masala, masalaning tarbiyaviy funksiyasi, masalaning ta'limiy funksiyasi, matematik qobiliyat, matematik hukm, birhad tushunchasi, ko'phad tushunchasi, ko'paytuvchilarga ajratish, guruhlash metodi, ko'phad ildizlari, didaktik prinsiplar, nom'alum koeffitsiyent, geometrik figura, absolut qiymat tushunchasi, koordinata tekisligi, algebraik ifoda.

V bob.
MATEMATIK TA'LIMNI TASHKIL QILISH METODIKASI

1-§. Matematika darsining tuzilishi va uni tashkil qilish metodikasi

Bizga pedagogika kursidan ma'lumki, dars maktablarda olib boriladigan o'quv-tarbiyaviy jarayonning asosidir. Shuning uchun ham dars jarayonida o'tiladigan mavzu mazmunini umumta'limiy, tarbiyaviy, rivojlantiruvchi va amaliy xarakterdagi tomonlari ochib beriladi. Kadrlar tayyorlash milliy dasturi qabul qilinganidan keyin maktablarda o'tiladigan har bir dars vazirlar mahkamasi tomonidan ishlab chiqilgan, ta'lim standartlari asosida olib borilishligi aytib o'tilgan. Har bir dars o'quv tarbiyaviy jarayondir.

Shuning uchun ham har bir darsda o'quv-tarbiyaviy jarayonining maqsadi, mazmuni, shakli, metodlari va uning vositalari orasidagi o'zaro aloqalar mazmunan ochib beriladi.

Agar metodika nuqtai nazardan matematika darsining tuzilishiga nazar tashlaydigan bo'lsak, unda quyidagi didaktik maqsadlar amalga oshiriladi. Darsning boshida o'quvchilar bilimi tekshiriladi. Bu tekshirish savol-javob yoki didaktik tarqatma materiallar asosida o'tkaziladi. Bunda qaysi o'quvchining avvalgi o'tilgan mavzu mazmunini qanday o'zlashtirgani va qanday qiyinchilikka uchragani hamda ana shu mavzu materiali yuzasidan o'quvchilarning olgan bilimi va ko'nikmalari tekshiriladi.

O'quvchilarning bergan javoblari o'qituvchi tomonidan izohlab baholanadi. Shundan keyin darsning asosiy maqsadi yangi mavzu o'quvchilarga tushuntiriladi va uni mustahkamlash uchun o'quvchilar bilan birgalikda misol yoki masalalar yechiladi. Bundan tashqari, ana shu mavzu mazmunini qanday darajada o'quvchilar o'zlashtirganliklarini bilish uchun o'qituvchi tomonidan o'quvchilarga nazariy va amaliy xarakterdagi savollar ham berib boriladi. Bundan keyin uyga vazifa berish va uni bajarish yuzasidan zarur ko'rsatmalar beriladi.

Yuqorida aytib o'tilgan bosqichlardan ko'rinadiki, matematika darsiga tayyorgarlik ko'rish o'qituvchidan o'rganiladigan mavzuning maqsadi va uning mazmuni nimalardan iborat ekanligini aniqlashdan iboratdir. Har bir o'qituvchi ertaga o'tadigan matematika darsida qanday o'quv-metodik jarayonni amalga oshiraman degan savolga javob izlashdan boshlashi kerak. 45-minutlik dars vaqtini taqsimlashda yangi materialni o'quvchilarga tushuntirishga va uni mustahkamlash yuzasidan misol va masalalar yechishga ko'proq vaqtni ajratish zarur.

Ko'p hollarda maktab o'qituvchilari ko'proq vaqtni uy vazifasini tekshirishga sarf qilib, yangi mavzu mazmunini bayon qilish va uni mustahkamlash vaqtini qisqartirishga olib keladilar. Bu usuldan qochish kerak, chunki darsning asosiy maqsadi yangi mavzu mazmunini o'quvchilarga tushuntirish va uni mustahkamlashdan iboratdir. Fikrlarimiz dalili sifatida «Bikvadrat tenglama ildizlarini topish» mavzusini o'rgatish metodikasini ko'rib chiqaylik.

1. Darsning maqsadi. Bikvadrat tenglama va uning ildizlarini topishni o'rgatish.

2. Oldingi darsda o'tilgan mavzu materialini o'quvchilar tomonidan takrorlash uchun savollar.

a) $ax^2 + bx + c = 0$ va $x^2 + px + q = 0$ ko'rinishdagi ifodalar qanday tenglamalar deyiladi?

b) $y = ax^2 + bx + c$ kvadrat uchhaddan to'la kvadratga ajratish uchun qanday ayniy almashtirishlarni bajarish kerak?

d) $x^2 + 3x - 4 = 0$ tenglamani yeching.

3. Yangi mavzu mazmuni bilan tanishtirish.

O'qituvchi: $6x^4 + 5x^2 + 1 = 0$ tenglamani qanday tenglama deb ataymiz?

O'quvchilar: 4-darajali tenglama deyiladi.

O'qituvchi: To'g'ri, shunday deyish ham mumkin, ammo matematikada shu ko'rinishdagi tenglamalarni bikvadrat tenglama deyiladi va uning umumiy ko'rinishi $ax^4 + bx^2 + c = 0$ kabi bo'ladi. Xo'sh, bunday tenglamani qanday yechish mumkin?

O'quvchilar: Biz bunday tenglamalarni yechmaganmiz.

O'qituvchi: Agar $x^2 = y$ deb belgilasak, x^4 ni qanday belgilaymiz?

O'quvchilar: Mulohaza yurtish, ilgari o'tganlarini eslash orqali $x^4 = y^2$ deb belgilaymiz deb aytadilar.

O'qituvchi: Yuqoridagi belgilashlarga ko'ra $ax^4 + bx^2 + c = 0$ tenglama qanday ko'rinishni oladi?

O'quvchilar: $ay^2 + by + c = 0$ bu tenglama kvadrat tenglamadir. Bunday tenglamani yechishni bilamiz.

O'qituvchi: $6x^4 + 5x^2 + 1 = 0$ tenglamani $x^2 = y$ belgilash orqali qanday tenglamaga keltiramiz?

O'quvchilar: $6y^2 + 5y + 1 = 0$ to'la kvadrat tenglama ko'rinishiga.

O'qituvchi: Bunday tenglamani yechishni bilamizmi?

O'quvchi: Bilamiz, $y_1 = \frac{1}{2}$; $y_2 = \frac{1}{3}$ bu tenglama yechimlari bo'ladi.

O'qituvchi: Bizdan qanday noma'lumni topish so'ralgan edi?
O'quvchilar: Noma'lum x ni topishni.
O'qituvchi: x ni qanday topamiz?

O'quvchilar: $x^2 = y$ tenglikdan $x^2 = \frac{1}{2}$ bo'ladi, bundan $x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$; $x^2 = \frac{1}{3}$ tenglikdan esa, $x_{3,4} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ bo'ladi.

4. O'tilgan mavzu mazmunini mustahkamlash uchun $9x^4 + 5x^2 - 4$; $x^4 + 7x^2 + 12 = 0$ va hokazoga o'xshash misollarni o'quvchilar bilan birgalikda yechish maqsadga muvofiqdir.

5. Uyga vazifa berish. Bunda darslikdagi misol va masala nomerlari o'quvchilarga o'qituvchi tomonidan aytiladi. Agar uyga vazifa berish ishi to'g'ri tashkil etilsa, ular o'quvchilarning bilimlarini mustahkamlaydi, mustaqil ishlash malakasini shakllantiradi, matematika fanini o'rganishda chidamlilik va tirishqoqlik malakalarini tarbiyalaydi. Uyga berilgan har bir topshiriq ko'pchilik o'quvchilarning kuchi yetadigan, o'quvchilar vazifaning ma'nosini va qanday bajarish kerakligini tushuna oladigan darajada bo'lishi kerak. Topshiriqning og'ir yengilligi o'quvchining sinfda o'tilgan materialni o'zlashtirishi va uni tushunishi bilan uzviy bog'liqdir, shuning uchun ham o'qituvchi uy vazifasini belgilashda o'quvchilarning uni bajarishga tayyor yoki tayyor emasligini nazarda tutishi lozimdir. Berilgan vazifalargina qo'yilgan maqsadga, ya'ni o'quvchilarni o'tilgan mavzular mazmunini puxta o'zlashtirishlariga olib keladi.

2-§. Matematika darsining turlari

1. Yangi mavzu mazmuni bilan tanishtirish.
2. Yangi mavzuni mustahkamlash.
3. O'quvchilarning bilimlarini, ko'nikma va malakalarini tekshirish.
4. O'quv materiallarini takrorlash va umumlashtirish.

Matematikadan 45-minutlik dars o'tilgan mavzuni o'quvchilardan so'rash yangi mavzuni bayon qilish, uni mustahkamlash, o'quvchilarning bilim, ko'nikma va malakalarini tekshirish kabi qismlarga ajratish, o'tiladigan har bir darsni didaktik maqsad va mazmunini tushunarli bo'lishini ta'minlaydi.

Maktab matematika darslarida yangi mavzu mazmunini tushuntirish asosan uch xil usulda olib boriladi. Ular ma'ruza, suhbat va mustaqil ishdir.

Hozirgi yangi pedagogik texnologiyaning mohiyati ham suhbat metodi orqali yangi mavzu mazmuni ochib berishdan iboratdir. Bunda mavzu mazmunini o'quvchining o'zi bayon qiladi, lekin mantiqiy mulohazalar vaqtida va turli hisoblashlarni bajarishda o'qituvchi o'quvchilarga mavzu mazmunini ochib beruvchi mantiqiy ketma-ketlikka ega bo'lgan savollar tizimi orqali murojaat qiladi, o'quvchilar ana shu savollarga javob berish orqali mavzu mazmunini chuqurroq o'zlashtirib oladilar. Shu usulda o'tkaziladigan darsning bir qismini misol qilib ko'rsatamiz.

Bir necha qo'shiluvchilar yig'indisining kvadrati formulasini keltirib chiqarish o'tilmoqda.

O'qituvchi: Ikki son yig'indisining kvadrati to'g'risidagi ifodani esingizga keltiring. Nosir sen ayt men doskaga yozaman.

O'quvchi: Doskaga $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ifoda yoziladi.

O'qituvchi: Endi $(a + b + c)^2$ ning qanday ifodalanishini aniqlaylik. Agar biz ikkita qo'shiluvchi yig'indisi kvadratining ifodasini biladigan bo'lsak, uchta qo'shiluvchi yig'indisi kvadratining ifodasini chiqarishni qanday boshlashimiz mumkin?

O'qituvchi: Shu uch son yig'indisini ikki son yig'indisi shaklida yozib olish kerak, masalan: $\left[(a+b)+c\right]^2$.

O'qituvchi: Bu yozilgan yig'indini kvadratga ko'taring, mumkin bo'lgan hamma sodalashtirishlarni bajaring. Karim, senda natija nima chiqdi, o'qib ber va hosil bo'lgan ifodani aytib tur, men doskaga yozib qo'yaman.

Karim aytib turadi, o'qituvchi yozadi.

O'qituvchi: Shu xilda mulohaza yuritib, to'rtta qo'shiluvchi yig'indisini kvadratga ko'taring: $(a + b + c + k)^2$. Rahim, qanday mulohaza yuritganingni, qanday shakl o'zgartirishlarni bajarish kerakligini aytib ber, natijani yana men doskaga yozaman.

Rahim to'rt hadni qanday qilib kvadratga ko'tarish kerakligini so'zlab beradi.

O'qituvchi: Ko'rib chiqqan hamma misollarimizda hosil bo'lgan ifodalarni diqqat bilan ko'rib chiqinglarchi, bulardan ko'phad kvadratini hosil qilish qoidasini chiqarish mumkin emasmikin? Nosir, nima payqading, aytchi?

Nosir so'zlab beradi va qoidani aytadi.

O'qituvchi. To'g'ri. Ammo biz faqat bir necha misol natijalarigagina suyanib xulosa chiqardik, shuning uchun uning to'g'riligidan shubhalanish, demak, uni isbot qilishni talab etish ham o'rinli bo'lar edi. Uning isboti bilan siz VIII sinfda tanishasiz, hozir u sizga og'irlik qiladi. Siz chiqargan xulosa to'g'ri va bundan keyin undan foydalanadigan bo'lamiz. Bu qoidani yana bir marta aytib chiqaylik.

Ba'zan biron teoremani isbot qilishdagi, yoki biron formulani keltirib chiqarishdagi ishni butun sinf yana ham mustaqilroq bajaradi, ammo bu holda ham o'qituvchi rahbarlik qiladi. Bunda o'quvchilarga o'z rejasini isbotlash metodini yoki mulohazalarini taklif etishga keng imkoniyat beriladi. Shu bilan birga, o'qituvchi ba'zan yordamchi savollar tashlaydi, ko'rsatmalar beradi, ayrim o'quvchilar o'z mulohazalarida xatoga yo'l qo'ygunday bo'lsa, tushuntirib beradi. Biroq bu yo'l juda ko'p vaqt oladi, chunki o'quvchilarning turli-tuman takliflari ularni asosiy masaladan chetga chiqaradi.

Sinfda yangi materialni o'rganishda qo'llaniladigan usullardan yana biri bu o'quvchilarning mustaqil ishlaridir. O'quvchilarning mustaqil ishlarida misol va masalalar yechishni mashq qilish, teorema isbotlarini turli xil usullarda bajarish (agar imkoni bo'lsa), mavzu mazmuniga qarab natijaviy formulalarni chiqarish va unga doir misollar yoki masalalarni tatbiq qilish kabi o'quv metodik ishlar amalga oshiriladi. Masalan, o'qituvchi to'la kvadrat tenglamasi va uning ildizlarini topish mavzusi o'tilgandan keyin, keltirilgan kvadrat tenglama va uning yechimlarini topishni mustaqil ish sifatida berishi mumkin. Bunda o'qituvchi o'quvchilarni kvadrat tenglama va uning yechimlari mavzusining mazmunini ochib beruvchi mantiqiy ketma-ketlikga ega bo'lgan savollar tuzishi bilan o'quvchilarni yo'naltirib turishi maqsadga muvofiqdir. O'qituvchi har bir o'quvchini qo'yilgan topshiriq mazmunini ochishdagi xato va kamchiliklarini to'g'rilab borishi lozim bo'ladi. Shundagina mustaqil ishlash usuli orqali o'quvchilar bilimini chuqurlashtirish mumkin bo'ladi.

Matematika darslarida ma'ruza metodidan ham foydalanib darslar o'tiladi. Bu holda o'qituvchi o'quvchilarni mulohazada ishtirok etdirmasdan, mavzu mazmunini yolg'iz o'zi bayon etadi. Shu bilan birga bayon etilayotgan mavzu mazmunidan nimani yozib olish, qanday chizmani chizib olish, doskadan nimalarni ko'chirib yozish kerakligi o'quvchilarga aytib beriladi.

O'qituvchi nazariy materialnigina emas, balki masalalarni yechilishini ham o'zi bajarishi hamda mantiqiy mulohazalarni o'zi aytishi va barcha chizmalarni chizish va yozuvlarni yozishni ham o'zi bajarishi mumkin.

Bunda o'qituvchining mavzu mazmunini bayon qilish usuli o'quvchilar uchun namuna bo'lishi, o'quvchilar ham o'z fikrlarini o'qituvchilardek bayon etishga intiladigan bo'lishi kerak. O'qituvchilarning nutqi savodli, mulohaza va isbotlari yetarli darajada asoslangan bo'lishi hamda nutqi ravon bo'lishi kerak. Agar darsda qo'llanilgan metodlar o'quvchilarda qiziqish tug'dirgan, ular diqqatini jalb qilgan bo'lsa, o'quvchilar mavzudagi asosiy mulohazalarni to'g'ri takrorlab bera olgan bo'lsalar, demakki, o'qituvchi mavzu mazmunini yoritishda qo'llangan metodidan qanoat hosil qilishi mumkin.

O'tilgan mavzuni mustahkamlash deganda biz asosan o'quv materialini nazariy ma'lumotlarini takrorlash hamda o'quvchilarni o'tilgan mavzu materiallari yuzasidan malaka va ko'nikmalarini shakllantirish uchun misol, masalalar yechish orqali o'tilgan darslarini takrorlab mustahkamlashni tushunamiz.

O'tilgan materialni takrorlash ilgari olingan bilimlarni yangilashga, o'tilgan mavzu mazmuniga umumiyroq nuqtayi nazardan qarashga yordam beradi.

O'tilgan mavzu mazmunini mustahkamlashda asosan quyidagilarga e'tibor berish kerak.

1. Yangi mavzu mazmunida qo'llanilgan asosiy tushunchalarni o'quvchilar tomonidan o'zlashtirilganlik darajasi.

2. Yangi mavzudagi teorema yoki uning isbotini o'quvchilar tomonidan aytib berilishi darajasi.

3. Yangi mavzuda o'rganilgan teorema va formulalardan misol, masalalar yechishda o'quvchilarning foydalana olish darajasi.

4. O'quvchilarning yangi mavzu mazmunini kundalik hayotda uchraydigan elementar muammolarga tatbiq qilish darajasi.

O'quvchilarni bilim, ko'nikma va malakalarini tekshirish o'tilgan materiallar yuzasidan og'zaki so'rash yoki yozma ish olish usuli bilan aniqlanadi. Bunday tekshirish darslarini o'tkazish o'qituvchi tomonidan bir hafta oldin e'lon qilinib, o'quvchilarga og'zaki so'raladigan mavzu materiallari va ular asosida o'qituvchi tomonidan tuzilgan savollar ketma-ketligi beriladi.

Agar tekshiruv darsi yozma ish orqali o'tkaziladigan bo'lsa, bunda ham yozma ish variantida tushadigan misol va masalalar qaysi mavzularga taalluqligi o'qituvchi tomonidan bir hafta oldin aytib qo'yiladi.

O'quv materialini takrorlash va umumlashtirish. Maktab matematika darslarida biror bob o'tib bo'lingandan keyin ana shu bob mavzu materiallarini umumlashtirish xarakteridagi takrorlash, umumlashtirish darslari o'tkaziladi.

O'tilgan materiallarni takrorlash-umumlashtirish darslari ilgari olingan bilimlarni yangilashga, ularni ma'lum bir tizimga solishga va o'tilgan materialga umumiyroq nuqtayi nazardan qarashga yordam beradi. Maktab matematika darslarida takrorlash-umumlashtirish darslarini quyidagi turlarga ajratish mumkin:

1. O'quv yili boshidagi takrorlash-umumlashtirish.
2. Kundalik takrorlash.
3. Tematik takrorlash-umumlashtirish darsi.
4. Yakuniy takrorlash-umumlashtirish darsi.

Har bir takrorlash darsining o'z o'rni va maqsadi bor. O'quv yili boshidagi takrorlash darsida o'qituvchi avvalgi sinfda o'tilgan asosiy mavzu materiallarining mazmunini hamda bu mavzularda qo'llanilgan asosiy matematik tushunchalarni o'qituvchining o'zi takrorlab imkoniyati boricha umumlashtirib beradi. Matematika fanini o'zi shunday fanki, o'qituvchining o'zi har bir darsda yangi mavzuning mazmunini tushuntirish jarayonida ilgari o'tilgan mavzular mazmuni va ulardagi matematik tushunchalardan foydalanib dars o'tadi. Bunday takrorlashni kundalik takrorlash darsi deb yuritiladi.

Matematikadan biror bob mavzu materiallari o'tib bo'linganidan keyin alohida takrorlash-umumlashtirish darslari o'tkaziladi. Bunday takrorlashni tematik takrorlash-umumlashtirish darsi deyiladi. Tematik takrorlash-umulashtirish darsi bo'lishidan oldin o'qituvchi takrorlanadigan bob mavzu materiallarini o'z ichiga oluvchi mantiqiy ketma-ketlikka ega bo'lgan savollarni o'quvchilarga bir hafta ilgari berib qo'yishi va ana shu savollar asosida tematik takrorlash darsi bo'lishini aytib qo'yishi lozim. Ana shu berilgan savollar asosida o'quvchilar bo'ladigan tematik takrorlash darsiga oldindan tayyorgarlik ko'radilar. Bunday takrorlash darsini o'qituvchi savol javob usuli orqali o'tkazadi. O'qituvchi rahbarligida o'quvchilar mavzularning ketma-ketligi va ularda qatnashayotgan matematik tushunchalar orasidagi mantiqiy bog'lanishlarni tushunib yetadilar. Natijada o'quvchilarning ana shu bob mavzu materiallari yuzasidan olgan bilimlari mantiqiy ketma-ketlikka ega bo'ladi va umumlashadi.

O'quv yilining oxirida ham reja asosida takrorlash darsi ajratilgan bo'ladi, bunday takrorlashni yakuniy takrorlash darsi deb yuritiladi.

Yakuniy takrorlash darsida o'quv yili davomida o'tilgan har bir bob mavzu materiallari takrorlab umumlashtirib boriladi.

Yakuniy takrorlash-umumlashtirish darsining muvaffaqiyatli o'tishi uchun o'quv yili boshidagi, kundalik, tematik takrorlash darslari o'z vaqtida o'tkazilgan bo'lishi kerak. Yakuniy takrorlash-umumlashtirish darsi orqali o'quvchilarning yil davomida olgan bilimlari umumlashtiriladi va sistemalashtiriladi.

Yakuniy takrorlash-umumlashtirish darsini hamma o'qituvchilar ham metodik jihatdan tashkil qilmaydilar. Biz bir necha maktabda o'tkazilgan yakuniy takrorlash-umumlashtirish darslarini kuzatdik, ular o'quv materiallarini umumlashtirish va sistemalashtirish o'rniga ba'zi maktablarda o'quvchilarni doskaga chiqarib qo'yib, ulardan o'tilgan o'quv materiallarini so'rash, ba'zilarida esa bir necha misol yoki masala yechish bilan cheklanishdi.

Ko'pchilik o'qituvchilar yakuniy takrorlash-umumlashtirish darsini o'tkazishda quyidagi kamchiliklarga yo'l qo'yadilar:

*Masalan, VIII sinfda «Ko'pburchaklarning yuzlari» nomli bobga quyidagicha reja tuzish mumkin.

1. Geometrik figuraning yuzi deganda nimani tushunasiz?

2. Nima uchun qabariq va botiq ko'pburchaklar ko'pburchakning xususiy holi bo'lishini tushuntiring.

3. Uchburchak, to'rtburchak va trapetsiyaning yuzlari qanday hisoblanadi?

4. Nima uchun parallelogramm qabariq to'rtburchakning xususiy holi bo'ladi?

5. Nima uchun trapetsiya yuzini hisoblash formulalari uchburchak, to'rtburchak yuzlarini hisoblash formulalarining umumlashgan holi bo'ladi?

Savollar

1. Kesma deb nimaga aytiladi?
2. Siniq chiziq deb nimaga aytiladi?
3. Qanday geometrik figurani ko'pburchak deyiladi?
4. Qanday ko'pburchak qabariq ko'pburchak deyiladi?
5. Qanday ko'pburchak botiq deyiladi?
6. To'rtburchak deb nimaga aytiladi?
7. Parallelogramm deb qanday to'rtburchakka aytiladi?
8. To'g'ri to'rtburchak deb qanday geometrik figuraga aytiladi?
9. Trapetsiya nima?
10. Romb nima?

11. Kvadrat nima?
12. Qanday geometrik figurani uchburchak deyiladi?
13. Uchburchak tomonlariga ko'ra necha turli bo'ladi?
14. Uchburchak burchaklariga ko'ra necha turli bo'ladi?
15. Uchburchakning tomonlari bilan burchaklari orasida qanday bog'lanish bor?
16. Qabariq ko'pburchak ichki burchaklari yig'indisi necha gradusga teng?
17. Parallelogrammning yuzi nimaga teng?
18. Uchburchakning yuzichi?
19. Trapetsiyaning yuzi qanday o'lchanadi?
20. Rombning yuzi nimaga teng?

Bu savollar tizimi asosida o'quvchilar uylarida mustaqil tayyorlanadilar, buning natijasida ular o'quvchilarda kitob bilan ishlash malakasi hamda mavzu mazmunlarini mustaqil o'zlashtirish malakalari shakllanadi.

3-§. Matematika darsiga tayyorgarlik va darsning tahlili

Matematika o'qituvchisi darsga tayyorgarlik ko'rishni o'quv yili boshida o'ziga ajratilgan sinf dasturiga ko'ra yillik ba'zan yarim yillik ish rejasini tuzishdan boshlaydi. Bundan tashqari, har bir matematika darsi uchun alohida ish rejasini tuzadi. Matematikaga doir ish rejada har bir mavzuning asosiy savollari, bu savollarni o'tish uchun ajratilgan soatlar va o'tilish muddati ko'rsatilgan bo'lishi kerak. Matematikadan tuzilgan ish rejada har bir mavzuni o'tish uchun qanday ko'rgazmali qurollardan foydalanish va qanday amaliy xarakterdagi misol hamda masalalarni yechish ham ko'rsatilgan bo'lishi maqsadga muvofiqdir. Matematikadan tuzilgan ish rejani maktabdagi o'quv metodika hay'ati muhokama qiladi va maktab direktori tomonidan tasdiqlangan u rasmiy hujjatga aylanadi va ana shu tasdiqlangan reja asosida o'qituvchi matematika darsining har bir mavzusini o'tadi, maktab rahbariyati ham ana shu tasdiqlangan ish reja asosida o'qituvchining o'quv faoliyatini tekshiradi. O'qituvchi har bir dars uchun mavzu yuzasidan ish rejani tuzishda quyidagilarga ahamiyat berish kerak bo'ladi.

1. Mavzu va uning shu darsda o'rganiladigan qismi ko'rsatiladi.
2. Uy vazifasi qanday tekshiriladi?
3. Qaysi o'quvchilardan so'raladi?

4. Sinfdagi o‘quvchilar uchun qanday mustaqil ishlar beriladi va qanday vaqtda beriladi?
5. Yangi mavzu bayoni ko‘rsatiladi, o‘quvchilarga qanday metod orqali tushuntirilishi va qaysi yerlarini yozishligi belgilanadi?
6. O‘tilgan yangi mavzuni mustahkamlash uchun beriladigan savollar yoki misol va masalalar yozib qo‘yiladi.
7. Uyga beriladigan vazifa, mavzu paragrafi, misol va masala nomerlari hamda o‘quvchilarga beriladigan ko‘rsatmalar yozib qo‘yiladi. O‘qituvchi har bir dars oxirida o‘quvchilar bilan birgalikda bugungi darsni yakunlashi va o‘quvchilar bilimini tekshirishi lozim. O‘qituvchi har bir darsning mazmunini yaxshi o‘ylab, rejalashtirsagina o‘quvchilar chuqur matematik bilimga ega bo‘ladi.

Bizga ma’lumki, har bir dars quyidagi bosqichlardan iborat edi.
1. O‘tilgan darsni o‘quvchilardan so‘rash va uni mustahkamlash.
2. Yangi mavzuni o‘qituvchi tomonidan tushuntirish va uni mustahkamlash.
3. Uyga vazifa berish.

Ana shu asosiy uch bosqichni amalga oshirishda o‘qituvchining ilmiy-metodik faoliyati maydalab mantiqiy tahlil qilinadi.
1. O‘tilgan darsni o‘quvchilardan so‘rash paytida, o‘qituvchi tomonidan o‘quvchilarga mavzu yuzasidan berilgan savollar to‘g‘ri bo‘ldimi yoki yo‘qmi?
2. Doskaga chiqqan o‘quvchilarga savollar to‘g‘ri berildimi, qo‘shimcha savollarchi?
3. Ularning bilimlarini baholashda o‘qituvchi reyting mezoniga rioya qildimi, o‘quvchilarning javoblari o‘qituvchi tomonidan tahlil qilindimi?
4. O‘tilgan mavzuni o‘quvchilardan so‘rash uchun o‘qituvchi ortiqcha vaqt sarf qilmadimi?
5. Tarqatma materialni yechib bo‘lgan o‘quvchilarning bilimi qanday baholandi?
6. O‘qituvchi o‘zi avvalgi mavzu mazmunini va o‘quvchilarning javoblarini qisqacha tahlil qilib yakunladimi?
7. Yangi mavzuning mazmunini ochib berishda ilmiy-metodik xatoga yo‘l qo‘ymadimi?
8. Yangi mavzuni qanday metod bilan tushuntirdi?
9. Yangi mavzuni mustahkamlashga qanday e’tibor berdi?
10. Yangi mavzuning geometrik ma’nosini ko‘rsatib bera oldimi?
11. Uyga berilgan vazifalardan namuna ko‘rsatdimi?
12. 45 minutlik vaqtni to‘g‘ri taqsimladimi?

13. O‘qituvchi mavzu mazmunini tushuntirishda o‘zini qanday tutdi?

14. O‘qituvchi yangi mavzuni tushuntirishda sinf o‘quvchilarini o‘ziga qarata oldimi?

15. O‘qituvchi o‘quvchilarning shaxsiyatiga tegmadimi?

16. Darsning tahlilidan so‘ng o‘qituvchiga beriladigan o‘quv, ilmiy, metodik va tarbiyaviy maslahatlar.

Har bir matematika darsini tahlil qilish yuqoridagi savollarga javob topish orqali amalga oshirilishi maqsadga muvofiqdir. Shundagina darsning tahlili samarali bo‘ladi.

4-§. Matematika darsiga qo‘yilgan talablar

Matematika darsining tahlili shuni ko‘rsatadiki, darsning maqsadi shu darsning tuzilish strukturasini va ana shu darsda bo‘ladigan barcha bosqichlarning o‘zaro mantiqiy munosabatlarini aniqlaydi.

1. Matematika darsiga qo‘yiladigan birinchi talab bu uning maqsadga tomon yo‘naltirilganligidir. Maqsadga tomon yo‘naltirilganlik deganda darsning maqsadida qo‘yilgan mavzu mazmunini tushuntirish orqali o‘quvchilarning mantiqiy fikrlash qobiliyatlarini shakllantirish hamda ularni aqliy va ma’naviy tarbiyalashni tushunamiz.

2. Matematika darsiga qo‘yilgan ikkinchi talab bu dars va uning mazmunini ratsional taqsimlashdir. Dars va uning turlarini to‘qri taqsimlash hamda matematika darsida o‘quvchilarning mavzu mazmunini yaxshi o‘zlashtirishlari orqali matematik, umumintellektual va o‘quv faoliyatiga nisbatan bilim, ko‘nikma hamda tafakkur qilish faoliyatlari shakllanadi.

3. Matematika darsiga qo‘yilgan uchinchi talab bu darsni o‘tkazishdagi o‘quv, tarbiya metodi va vositalarini tanlashdan iboratdir. Matematika darslarida o‘quv, tarbiya usullarini tanlash katta ahamiyatga egadir. Matematika o‘qituvchisi mavzu mazmuniga qarab tushuntirish, ilmiy izlanish va xulosa chiqarish metodlaridan qaysilarini qo‘llansa o‘quvchilar mavzu mazmunini yaxshiroq o‘zlashtirishlarini aniqlab olishi lozim, shundagina dars samarali bo‘ladi.

4. Matematika darsiga qo‘yilgan to‘rtinchi talab bu darsni o‘tkazishda o‘quvchilarning bilishga doir bo‘lgan faoliyatlarini shakllantirish uchun o‘quv jarayonini har xil usullarda tashkil qilishdir. O‘qituvchi darsda o‘tiladigan mavzu mazmuniga qarab o‘quvchilar faoliyatlarini oldindan belgilashi kerak bo‘ladi. Agar darsda yangi mavzu o‘tiladigan bo‘lsa, unda o‘qituvchining o‘zi mavzu mazmunini ma’ruza yoki suhbat usullari

orqali o‘quvchilarga tushuntiradi. Agar darsdagi mavzu avvalgi o‘tilgan mavzuga doir misol yoki masala yechish bo‘lsa, unda mustaqil ishlash yoki yakka tartibda topshiriqlar berish usullaridan foydalanish mumkin. Buning natijasida sinfdagi o‘quvchilar o‘zlarining intellektual qobiliyatlari orqali mavzu mazmunini u nazariy yoki amaliy xarakterda bo‘lishini yaxshi o‘zlashtiradilar.

5-§. O‘quvchilarning bilimlarini tekshirish

«Ijroni tekshirish»ning to‘g‘ri yo‘lga qo‘yilishi har qanday ish sohasida katta ahamiyatga ega bo‘lgani singari, o‘qitish ishlarida ham g‘oyat katta ahamiyatga egadir. U, o‘qituvchiga o‘quvchilarda mas’uliyat tuyg‘usini tarbiyalashga, o‘quvchilarning bilimlaridagi kamchiliklarni o‘z vaqtida aniqlab olishga, o‘z ishini to‘g‘ri baholashga imkon beradi.

O‘quvchilarning bilimlarini tekshirish ishi muntazam ravishda, ya’ni har kuni olib borilishi kerak. Dastavval yangi materialni bayon etgandan keyin uning qay darajada tushunilganligini tekshirib olish lozim. Darsning asosiy maqsadi o‘tiladigan mavzu mazmunini o‘quvchilarga tushuntirish ekanini, o‘quvchilar bilimni asosan darsda olishlari kerakligini esda tutib, o‘qituvchi o‘zining shu maqsadga erishgan yoki erishmaganligini har bir darsda o‘tilgan mavzu mazmunining asosiy yerlarini o‘quvchilardan so‘rash orqali tekshirib borishi zarur.

O‘quvchilarning o‘zlashtirish darajasini turli yo‘llar bilan tekshirish mumkin, ya’ni biron formulani chiqarish yoki biron teoremani isbotlashdagi asosiy mulohazalarni o‘quvchi tomonidan bajarish, ilgaridan tayyorlab qo‘yilgan mavzu mazmuniga doir savollarni o‘quvchilarga berish, olingan nazariy xulosalarni masala yoki misollar yechishga tatbiq qila olish qobiliyatlarini aniqlab bilishdan iboratdir.

Bularning hammasi o‘quvchilarning o‘zlashtirish natijalarini aniqlashga va shu bilan birga o‘tilgan materialni mustahkamlashga yordam beradi.

Yozma uy vazifalarining bajarilgan-bajarilmaganligini tekshirish ishi ko‘pincha sinfni «aylanib chiqib» o‘quvchilarning daftarlarini ko‘rish yo‘li bilan bajariladi. Bu yo‘l vazifaning bajarilganligini aniqlashga imkon beradi, ishning sifatini esa bu yo‘l bilan aniqlab olish qiyin.

Uy vazifasini tekshirish uchun aylanma daftar tutish ijobiy natija beradi, chunki vazifasi tekshirilgan daftar o‘quvchiga berilganda ular daftardagi o‘qituvchi tomonidan qo‘yilgan baholarni va izohlarni ko‘rib, berilgan topshiriqlar bo‘yicha qanday bilimga ega ekanliklarini bilib oladilar. O'qituvchi uy vazifalar natijasini reyting mezoni bo'yicha ballar asosida baholashi shart.

Bundan tashqari, doskaga ayrim o'quvchilarni chiqarib, o'tilgan mavzuga doir o'qituvchi aytgan masala yoki misolning yechilishini so'rash orqali ham aniqlanadi.

Har bir masala yoki misolning yechilishini mufassal bir o'quvchining o'zi oxiriga yetkazishi shart emas. Berilgan vazifa yuzasidan eng muhim savollarni ilgaridan tayyorlab qo'yib, tekshirishni ana shu reja bo'yicha olib borish mumkin.

Masala va misollarning yechilishini tekshirganda bir masalaning bir necha xil yechilish variantlarini aniqlash, hisoblashga doir misollarda esa qo'llanilgan turlicha yechish usullarini ko'rsatish va ular ichidan yechishning eng ma'qul usullarini aniqlab olish kerak.

Har kuni hamma o'quvchilarning daftarlarini tekshirib chiqish mumkin emas, ammo bu ishni hech bo'lmaganda tanlab olish yo'li bilan qilish kerak. Har bir darsning oxirida 8—10 o'quvchining daftarini olish yo'li bilan bir oyda har bir o'quvchining daftarini aqalli uch marta ko'zdan kechirish kerak. Bu holda o'quvchining ikki hafta davomida bajargan hamma ishlarini tekshirib chiqishga ulguriladi. Bunda tekshirilgan daftarlarda ko'rsatilgan xatolarni o'quvchilarga albatta tuzattirish kerak, shu holdagina tekshirish ishlari maqsadga muvofiq bo'ladi.

Bunday tekshirganda bajarilgan ishning to'g'riligini, topshiriqning to'la bajarilishini va ishning chiroyli, ozoda hamda batartib bajarilishini e'tiborga olib turib, uy vazifalarini bajarishga alohida reyting mezonlari asosida baho qo'yish kerak.

Daftarlarni tekshirib borish o'qituvchiga o'quvchilar tomonidan berilgan vazifalarni bo'sh o'zlashtirilgan joylarini, misollarni yechishdagi o'quvchilarni yo'l qo'ygan xatoliklarini aniqlab olishga va o'z vaqtida ularni to'g'rilab olish choralarini ko'rishga imkon beradi.

O'quvchilar bilimini tekshirishning yana yo'llaridan biri bu ulardan og'zaki so'rashdir. Buning uchun avvalo o'qituvchi tomonidan mavzu mazmunini ochib beradigan mantiqiy ketma-ketlikka ega bo'lgan ta'riflar, qoidalar, murakkab bo'lmagan xulosalar va teoremalarning isbotini tushuntirib berishni talab etadigan savollar tizimi tuziladi. Savol sinf o'quvchilariga berilib, javobini o'ylashga bir necha minut vaqt beriladi. So'ngra bir o'quvchidan so'raladi. Uning javobini baholashda butun sinf ishtirok etadi (to'g'ri, noto'g'ri, yetarli darajada mukammal, javob asosli yo asosli emas va hokazo); javobga qo'shimcha qiluvchilarga yoki xatoni tuzatuvchilarga ham so'z beriladi.

Javoblar reyting asosida baholanadi, biroq sinf jurnaliga yozilmaydi, uch-to'rt marta shu xil joyda turib berilgan javoblarga o'qituvchi tomonidan umumiy ball qo'yilib, bu ball sinf jurnaliga va o'quvchining kundalik daftariga yozib qo'yiladi. Bu holda o'qituvchi berilgan savol va olingan javoblarni maxsus yuritilgan reyting daftariga yozib boradi.

Doskaga 1—2 o'quvchi chiqarilganda ularning har biriga berilgan savolga javob tayyorlash kerak bo'lib qolganda doskada chizma chizish, javobni bog'lanishli qilib aytib berishni osonlashtiradigan yozuvlarni qisqacha yozib qo'yishga imkon beriladi.

Bu o'quvchilar javob tayyorlagunlaricha o'qituvchi qolgan o'quvchilar bilan suhbat asosida savol-javob qilib, og'zaki masalalar yechdirishi, ta'riflarni, teoremalarning aytilishini, sodda xulosalar chiqarish kabilarni so'rab turishi lozim bo'ladi.

Ba'zilar, o'qituvchining sinf bilan qiladigan suhbatidan ikki o'quvchini bo'lsa ham ajratib qo'yish zararli deb, bu xil so'rashga e'tiroz bildiradilar. Ammo, chiqarilgan o'quvchilarning tayyorlanish vaqtida butun sinfning zerikib kutib o'tirishga majbur qilishdan ko'ra, ikki o'quvchini bu xil suhbatdan mahrum qilish yaxshiroq. Doskaga chiqarib o'quvchilar javobini eshitish ham yaxshi natija beradi.

Doskaga chaqirilganlarning javobini eshitishga kelganda ish boshqacha; ularning javoblarini butun sinf o'quvchilari eshitishi kerak. Sinf o'quvchilarini bu vaqtda doskadagi o'quvchilar javoblarini eshitishga jalb qilish kerak. Chaqirilgan o'quvchilar javob bergandan keyin boshqa o'quvchilarga qo'shimcha qilishga, tuzatishlar berishga, o'z fikrlarini aytishga imkon beriladi. Bu savolga to'la va to'g'ri javob olingandan keyin o'qituvchi shu o'quvchining o'ziga endi uzoq tayyorlanishni talab etmaydigan va ilgaridan belgilab qo'yilgan savollarini berishi mumkin.

Ba'zi o'quvchilarning javob beruvchi o'quvchiga shu mavzuga doir qo'shimcha savollar berishiga yo'l qo'yiladi. Bu, o'quvchilarni shu mavzuga doir hamma materialni xotirlashga majbur qiladi. Ammo o'quvchilarni muhim savollar berishga o'rgatish lozim, buning uchun esa o'qituvchi mavzuni o'rganish vaqtida o'rganiladigan materialning eng kerakli va muhim tomonlarini ajratib ko'rsata bilishi kerak bo'ladi.

Har holda, so'rash usulidan qat'iy nazar, o'qituvchi, birinchidan, so'raladigan materialni ilgaridan belgilab qo'yishi, savollarning qay tarzda berilishini puxta o'ylashi, masala yechilishining yoki isbotning qanday borishi kerakligini ham oldindan o'ylab qo'yishi lozimdir. Shundagina o'tilgan mavzu bo'yicha o'quvchilarning olgan bilimlari sifatli bo'ladi.

O‘quvchilar bilimini tekshirishning yana bir usuli bu o‘qituvchi tomonidan o‘tilayotgan mavzuga va takrorlashga doir savollar yozilgan kartochkalarni oldindan tayyorlab qo‘yishdir. Bunday kartochkalar doskaga chiqarilgan 2—3 o‘quvchiga beriladi va tayyorgarlik (javobni o‘ylash, doskada kerakli yozuvlarni yozish) uchun 8—10 minut vaqt ko‘rsatiladi.

Ular tayyorlanayotganda o‘qituvchi sinf bilan suhbat o‘tkazadi yoki butun sinfga kichikina mustaqil ish beradi. Doskaga chiqarilgan o‘quvchilar o‘z javoblarini to‘la bayon etganda o‘quvchilar quloq soladi va ularga har bir savolning javobidan keyin qo‘shimcha qilishga imkon beriladi. O‘qituvchi o‘quvchilarning javoblarini reyting asosida ballar bilan baholab boradi.

So‘rash usuli qanday bo‘lishidan qat’iy nazar, unga nisbatan ba’zi majburiy talablar qo‘yishga to‘g‘ri keladi. Bu talablar quyidagilardan iboratdir.

a) ma’lum maqsadni ko‘zda tutish kerak. Bu maqsad ba’zi o‘quvchilarga aniq bo‘lmasligi mumkin, ammo o‘qituvchi uni ochiq-oydin tasavvur qilishi shart;

b) mavzuning asosiy qoidalarini takrorlashga va mustahkamlashga yordam berishi hamda teoremalar, o‘rganilgan qonunlar va bajariladigan shakl o‘zgartirishlar orasidagi bog‘lanishni aniqlashga, fazoviy tasavvurlarni kengaytirishga, mantiqiy fikrlashni o‘stirishga, o‘z fikrini to‘g‘ri va chiroyli nutq bilan bayon etishga yordam berishi kerak;

d) berilgan savolni tezlik bilan o‘qib olish va qisqa, aniq javob bera olish qobiliyatini o‘quvchilarda tarbiyalashi kerak;

e) teorema yo qonunlarning aytilishiga o‘tkir diqqat eta bilishga, javob yozuvlarning va chizmalar to‘g‘riligini hamda tugalligini baholay bilishga, qo‘shimcha va tuzatishlar bera bilishga o‘rgatishi kerak;

f) so‘rashda o‘qituvchi beradigan savollar oz vaqt talab qiladigan, ravon, mazmunli bo‘lishi shart.

Yozma tekshirish ishlari (yozma ish, test nazorat ishlari) qisqa vaqtga 10—12 minutga mo‘ljallab, ba’zilar esa ko‘proq vaqtga 1—2 soatga mo‘ljallab berilishi mumkin. Qisqa vaqtga mo‘ljallangan yozma ishlarni darsning ikkinchi yarmida berish qulayroq va bunda ko‘proq o‘quvchilarning har xil hisoblashlarni tez bajara olishlarini tekshirish, ayniy shakl o‘zgartirishlarni bajara bilishini tayyor tenglamalarni tez yecha bilishini, geometrik figuralarning xossalarini aytib bera olishlarini tekshirishlar ko‘zda tutilgan bo‘lishi kerak.

Takrorlash uchun savollar

1. *Matematika darsining tuzilishini gapirib bering.*
2. *Matematika darsini tashkil qilish qanday amalga oshiriladi?*
3. *Yangi mavzuni tushuntirish qanday usullar bilan amalga oshiriladi?*
4. *Yangi mavzuni mustahkamlash deganda nimani tushunasiz?*
5. *O'quvchilarning bilimlarini tekshirish qanday usullar orqali amalga oshiriladi?*
6. *O'quv materialini takrorlash turlarini aytib bering.*
7. *Yakuniy takrorlash bilan tematik takrorlashning farqlarini aytib bering.*
8. *O'qituvchining matematika darsiga tayyorgarlik ko'rishini aytib bering.*
9. *Matematika darsiga qo'yilgan talablarni aytib bering.*
10. *Matematika darsining tahlilini tushuntiring.*
11. *O'quvchilar bilimlarini tekshirish usullarini aytib bering.*
12. *Yozma ish deganda nimani tushunasiz?*

Tayanch iboralar

Matematika darsi, darsning tuzilishi, yangi mavzu, darsni mustahkamlash, takrorlash turlari, darsga tayyorgarlik, ishchi reja, matematika dasturi, darsga qo'yilgan talab, dars tahlili, bilimlarni tekshirish, yozma ish, reyting nazorati.

VI bob.
SON TUSHUNCHALARINI KIRITISH, UNI KENGAYTIRISH VA SONLAR USTIDA AMALLAR BAJARISH METODIKASI

1-§. Natural son tushunchasini kiritish va ular ustida amallar bajarish metodikasi

Eramizdan avvalgi asrlarda yashagan insonlar tirikchilik uchun har xil qushlar, kiyiklar va boshqa jonivorlarni ovlash bilan kun kechirganlar. Ana shu ovlangan kiyiklarni, umuman olganda jonivorlar sonini dastlab qo'l va oyoq barmoqlari bilan ko'rsatib tushuntirishga odatlanganlar. Agar ovlangan jonivorlar soni ikkala qo'l barmoqlari sonidan ko'p bo'lsa, ularni hisoblash uchun oyoq barmoqlaridan ham foydalanganlar. Vaqt o'tishi bilan kishilarning ongi ham ana shu davrga nisbatan shakllana borgan. Har xil xo'jalik ishlarini bajarish jarayonidagi hisoblarga oyoq va qo'l barmoqlarining soni javob berolmay qolgan, natijada ular hisoblash ishlarini bajarishda tayoqchalardan foydalanganlar. Ana shu qo'l va oyoq barmoqlari hamda ishlatilgan tayoqchalarni sanash natijasida bir, ikki, uch, to'rt va hokazo sonlar hosil qilingan. Masalan, bitta qush, ikkita kiyik, uchta yo'lbars va hokazo. Yuqoridagi mulohazalardan ko'rinadiki, son – bu odamlar sanash natijasida narsalarning miqdoriy qiymatlarini ifoda qiluvchi tushuncha ekan. Sonlar raqamlar bilan belgilanadi, bizning sanoq sistema o'nlik sistema bo'lganligi uchun u to'qqizta qiymatli va bitta qiymatsiz raqam bilan belgilanadi: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Matematika kursida 1, 2, 3, ... qatorni ***natural sonlar qatori*** deb ataladi. Natural sonlar to'plami quyidagi xossalarga ega:

1. Natural sonlar to'plamining birinchi elementi 1 ga teng.
2. Natural sonlar to'plamida ixtiyoriy natural sondan keyin keladigan va undan bitta ortiq bo'lgan birgina natural son mavjuddir.
3. Natural sonlar to'plamida 1 sonidan boshqa har bir natural sondan bitta kam bo'lgan va bu sondan oldin keladigan birgina natural son mavjuddir.

Boshlang'ich sinf matematika kursida natural sonlar to'plami haqidagi eng sodda tushunchalar o'quvchilarda shakllantiriladi. IV sinfda esa koordinata tekisligi va nur tushunchalari kiritilganidan keyin natural sonlar to'plamining geometrik tasviri ko'rsatiladi.

Har bir natural songa koordinata nurning bitta nuqtasi mos kelishini o'qituvchi ko'rgazmali qurollar yordamida tushuntirishi lozim. Shundan keyin o'quvchilarga natural sonlarni og'zaki va yozma nomerlash ishlari o'rgatiladi. Buning natijasida o'quvchilar natural sonlarni o'qish va yozishni o'rganadilar.

1. Sanash vaqtida birinchi o'nta sonning har biriga alohida nom beriladi.

2. Sanoq birliklari guruhlarga shunday birlashtiriladiki, buning natijasida bir xil o'nta birligidan yangi ikkinchi xona birligi, ikkinchi xonaning o'nta birligidan yangi uchinchi sanoq birligi va hokazolar tuziladi.

3. Ikkinchi xonadan boshlab har bir xona birligi shu xonadan bevosita quyi xonaning o'nta birligidan tuzilgani uchun bizning sanoq sistemamiz o'nlik sanoq sistemasi deb ataladi. 10 soni esa sanoq sistemasining asosi deb ataladi.

4. Turli xonalardan iborat bo'lgan sonlarning har uchtasining birliklarini birlashtirib sinflar tuziladi. Dastlabki to'rtta xona birliklariga alohida nomlar beriladi, ya'ni bulardan to'rtinchi xona birligi ming, ikkinchi sinf birligi deb qaraladi va undan xuddi asosiy birliklardan tuzilgan kabi navbatdagi birliklar tuziladi. Ikkinchi sinfning mingta birligi uchinchi sinfning birligi — millionni tashkil etadi va hokazo.

5. Sonlarni yozish uchun 10 ta raqam qo'llanadi, noldan boshqa hamma raqamlar ***qiymatli raqamlar*** hisoblanadi.

6. Qiymatli raqamlarning qiymati ularning sondagi o'rniga qarab o'zgaradi. Bundan keyin o'qituvchi o'quvchilarga natural sonlarni qo'shish va ayrishni hamda ko'paytirish va bo'lishni kundalik hayotda uchraydigan misollar asosida o'rgatishi maqsadga muvofiqdir.

Masalan, Odiljon 35 ta ko'chat, Qobiljon esa 30 ta ko'chat ekdi. Ularning ikkalasi birgalikda necha to'p ko'chat ekishgan? $30 + 35 = 65$ ta.

Ikkita natural sonni qo'shish natijasida yangi bir natural son hosil bo'ldi, uni shu sonlarning yig'indisi deyiladi. 30 va 35 sonlari ***qo'shiluvchilar***, 65 soni ***yig'indi*** deb ataladi. Shu fikrlar o'quvchilarga o'rgatiladi, so'ngra qo'shish amaliga ta'rif beriladi.

Ta'rif. *Ikki sonning yig'indisini topish amaliga qo'shish deb ataladi.*

Natural sonlarni qo'shish yana quyidagicha usul bilan tushuntirilishi mumkin.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ... natural sonlar to'plamini doskaga yozib, unda 4 soni belgilanadi, so'ngra ana shu 4 sonidan unga qarab 6 ta son sanaladi, natijada 10 soni hosil bo'ladi. Demak,

$4+6 = 10$ bo'lar ekan. $6+4 = 10$ bo'lishini ham yuqoridagidek tushuntirish mumkin. 1, 2, 3. 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ... natural sonlar to'plamida 6 sonini belgilab, undan o'ngga qarab 4 ta son sanaladi, natijada 10 soni hosil bo'ladi, demak, bundan quyidagi xulosa kelib chiqadi $a + b = b + a$. Bu tenglikdan qo'shish amaliga nisbatan quyidagi qoidani ifoda qilish mumkin.

Qoida. *Qo'shuvchilarning o'rni almashgani bilan yig'indining qiymati o'zgarmaydi, ya'ni* $a + b = b + a$.

Biz qo'shiluvchilar sonini uchta olganimizda ham yuqoridagi qoida o'rinli bo'lib, $(a+b)+c=(a+c)+b$ tenglik hosil bo'ladi, bu esa qo'shish amaliga nisbatan guruhlash qoidasini ifodalaydi.

Endi natural sonlarni ayirish qaraladi. Natural sonlarda ayirish amalini o'rgatish uchun quyidagidek masalalarni qarash mumkin. Taqsimchada 20 dona konfet bor edi. Fozil shu konfetdan 6 donasini yeb qo'ydi. Tarelkada necha dona konfet qoldi? Bu masalani yechish uchun shunday noma'lum x sonini topish kerakki, bunda $6 + x = 20$ tenglik o'rinli bo'lishi kerak. Bu hosil qilingan tenglikni o'qiydigan bo'lsak, birinchi qo'shiluvchi va yig'indi ma'lum bo'lib, ikkinchi qo'shiluvchi esa noma'lumdir.

Qoida. *Qo'shiluvchilardan biri va yig'indi ma'lum bo'lganda ikkinchi qo'shiluvchi noma'lum sonni topish amaliga ayirish deb ataladi.*

$$x = 20 - 6. \qquad x = 14.$$

Agar umumiy holda $a + x = b$ desak, bundan $x = b - a$ hosil bo'ladi. Bunda x – ayirma, b – kamayuvchi, a – ayiriluvchi deb yuritiladi.

Ayirish amalini o'quvchilarga yana quyidagicha tushuntirish mumkin. Masalan, 20 sonidan 6 sonini ayirish kerak bo'lsin. Buning uchun 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21 ... natural sonlar qatorini doskaga yozib, 20 son belgilanadi va undan chapga qarab oltita son belgilaymiz, natijada 14 soni hosil bo'ladi, bu degan so'z $20 - 6 = 14$ deganidir deb o'quvchilarga tushuntiramiz. Bu yerda 20 soni kamayuvchi, 6 soni ayiriluvchi, 14 soni esa ayirma deb ataladi.

Masala. 5 ta tokchaning har biriga 16 ta donadan kitob terilgan bo'lsa, hammasi bo'lib qancha kitob terilgan?

Bu masalani yechish uchun qo'shish amalidan quyidagicha foydalaniladi: $16+16+16+16+16=80$ yoki bu tenglikni $16 \cdot 5=80$ ko'rinishda ham yozish mumkin: bunda javoblarning bir xil bo'lganligini o'qituvchi o'quvchilarga tushuntirishi lozim. Bu yerda 16 va 5 sonlari ***ko'paytuvchilar***, 80 soni esa ***ko'paytma*** deb yuritiladi.

Ta'rif. Qo'shiluvchilari o'zaro teng bo'lgan sonlarning yig'indisini topish amaliga ko'paytirish deyiladi va u bunday yoziladi:

$$\underbrace{a+a+a...+a}_{b}=a\cdot b=c$$

a va b sonlari ***ko'paytuvchilar***, c esa ***ko'paytma*** deb yuritiladi.

Yuqoridagi ma'lumotlardan keyin ko'paytirish amaliga nisbatan o'rinli bo'lgan quyidagi uch qonunni ko'rsatish lozim.

1. Ko'paytirish amaliga nisbatan o'rin almashtirish (komutativlik) qonuni o'rinli.

$a \cdot b = c$ bo'lsa, $b \cdot a = c$ bo'ladi.

2. Ko'paytirish amaliga nisbatan tarqatish (distributivlik) qonuni o'rinli:

$$a\,(b + c) = ab + ac.$$

Bu qonunni bunday tushuntirish mumkin.

$$(b+c)\cdot a=\underbrace{(b+c)+(b+c)+(b+c)+...(b+c)}_{a}=ab+ac.$$

3. Ko'paytirish amaliga nisbatan guruhlash (assotsiativ) qonuni o'rinli $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$, bu tenglikni quyidagicha tushuntirish mumkin:

$$(a\cdot b)\cdot c=\underbrace{\underbrace{a+a+}_{b}...\underbrace{a+a+}_{b}+..\underbrace{a+a+...+...}_{b}}_{c}=a\cdot(b\cdot c)$$

Bu tenglikni quyidagicha izohlash mumkin. Har bir qatorda b tadan qo'shiluvchi $b\cdot c$ bo'lib har bir qo'shiluvchi a ga teng, ya'ni $(b\cdot c)\cdot a$ deb yozish mumkin.

4. Omborga 5 yashikda 625 kg olma keltiridi. Har bir yashikda necha kilogrammdan olma bo'lgan? Bu masalani yechish uchun shunday x sonini topish kerakki, x=625 : 5 bo'lsin. Bunday son 125 bo'ladi.

Ana shu 125 sonini hosil qilish uchun bo'lishni, ya'ni x=625:5 amalni bajariladi, bu amal ***bo'lish*** deb yuritiladi.

Ta'rif. *Ko'payuvchi sonlardan biri va ko'paytma son ma'lum bo'lganda, ikkinchi ko'payuvchi sonni topish amaliga bo'lish deyiladi* va u quyidagicha yoziladi $a\cdot x=c$, $x=c:a$, x — bo'linma, c — bo'linuvchi, a — bo'luvchi deb yuritiladi. Yuqoridagi misolda esa 625 — bo'linuvchi, 5 — bo'luvchi, x — bo'linma deb ataladi.

Har qanday natural sonni 0 soniga bo‘lish mumkin emas, chunki $0 \cdot x = c$ tenglikni qanoatlantiradigan x sonini topish mumkin emas. Demak, $x = x : 0$ tenglikning bo‘lishi mumkin emas.

Ma’lumki, qo‘shish amaliga nisbatan qarama-qarshi amal ayirishni va bu ko‘paytirishga nisbatan teskari amal bo‘lishni quyidagi sxema orqali ko‘rsatish ham mumkin:

$$3 + 5 = 8$$

$$\swarrow \qquad \searrow$$

$$3 + x = 8 \qquad\qquad y + 5 = 8$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$x = 8 - 3 = 5 \qquad\qquad y = 8 - 5 = 3$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$x = 5 \qquad\qquad y = 3$$

$$5 \cdot 4 = 20$$

$$\swarrow \qquad \searrow$$

$$x \cdot 4 = 20 \qquad 5 \cdot y = 20$$

$$x = 20 : 4 = 5 \qquad y = 20 : 5 = 4$$

15-chizma.

Bu sxemani jadval tarzida ham berish mumkin.

To‘g‘ri amallar	Qarama-qarshi amal
Qo‘shish	Ayirish
3 + 5 = 8	1. 8 − 3 = 5 2. 8 − 5 = 3
Ko‘paytirish	Teskari amal bo‘lish
5 x 4 = 20	1. 20 : 4 = 5 2. 20 : 5 = 4

2-§. Natural sonlar to‘plamini kengaytirish

Bu mavzuni tushuntirish jarayonida o‘qituvchi o‘quvchilarga koordinata nurining har bir nuqtasiga bittadan natural son mos kelmasligini, ya’ni koordinata nuridagi nuqtalar to‘plamini ortib qolishini ko‘rgazmali asosda tushuntirishi lozimdir. Bu mulohazaga ko‘ra natural sonlar to‘plamini yanada kengaytirish va natijada yangi sonlar to'plamini hosil qilish ehtiyoji zarur ekanligini o'qituvchi yana bir marta o'quvchilarga tushuntirishi lozim.

Bundan tashqari, o'qituvchi natural sonlar to'plamida har doim qo'shish va ko'paytirish amallarini bajarish mumkin, ammo ayirish va bo'lish amallarini har doim ham bajarish mumkin emasligini misollar yordamida ko'rsatish kerak.

Masalan, $5 + 3 = 8$, $2 \cdot 7 = 14$. Bu yerda hosil qilingan 8 yig'indi va ko'paytma 14 sonlar natural sonlar to'plamida mavjuddir, ammo 3−5 ayirmada chiqadigan − 2 soni natural sonlar to'plamida mavjud emas, bu natural sonlar to'plamida har doim ham ayirish amalini bajarish mumkin emas degan so'zdir. Umuman olganda natural sonlar to'plamida $X + M = P$ ko'rinishdagi tenglama $P=M$ bo'lgan holda yechimga ega emas. $X+M=P$ tenglama yechimi $X = P - M$ $P \leq M$ bo'lganda ham o'rinli bo'lishi uchun 0 soni va barcha butun manfiy sonlar to'plami degan tushuncha kerakdir, shuning uchun ham natural sonlar to'plamini kengaytirish orqali boshqa yangi sonlar to'plamini hosil qilish g'oyasi kelib chiqadi.

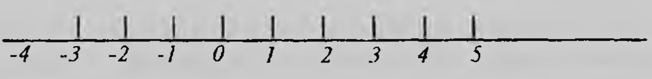
3-§. Butun sonlar va ular bilan to'rt amalni bajarish metodikasi

5-sinfda «Koordinata to'g'ri chizig'i» nomli mavzu o'tiladi, ana shu mavzuni o'tish uchun sanoq boshi degan tushuncha kiritilgan bo'lib, shu sanoq boshi nomli nuqtani 0 (nol) soni bilan belgilangan.

0 so'zi lotincha *nallrse* — so'zidan olingan bo'lib «hech qanday qiymatga ega bo'lmagan» degan ma'noni bildiradi. Nol soni natural sonlar to'plamiga kirmaydigan qiymatsiz son hisoblanadi. Matematikada bo'sh to'plam tushunchasini ham 0 soni bilan ifodalanadi.

To'g'ri chiziqdagi sanoq boshi deb ataluvchi 0 nuqtadan unga 1, 2, 3 sonlari, chapga esa −1, −2, −3, ... sonlarni yozish va chapdagi sonlarni «minus bir», «minus ikki», «minus uch» ... deb o'qishga kelishilgan. 0 soni to'g'ri chiziqda musbat va manfiy sonlarni ajratib turadi. 0 sonidan o'ng tomonidagi natural sonlarni butun musbat sonlar, chap tomondagi sonlarni esa butun manfiy sonlar deb ataladi. Yuqoridagi mulohazalarga ko'ra butun sonlar to'plamiga quyidagicha ta'rif berish mumkin.

Ta'rif. Barcha natural, butun manfiy va nol sonlari birgalikda butun sonlar to'plami deyiladi (16-chizma).



16-chizma.

Bu yerda natural sonlarga nisbatan qarama-qarshi sonlar barcha butun manfiy sonlardir, masalan, 1 va -1, 2 va -2, 3 va -3, $-$.... qarama-qarshi sonlar barcha butun manfiy sonlardir.

Butun sonlar to‘plamida faqatgina 0 soniga nisbatan qarama-qarshi bo‘lgan son yo‘qdir:

$$0 = 0 + 0.$$

Maktab matematika kursida manfiy son tushunchasi kiritilganidan keyin sonning moduli tushunchasi ham kiritiladi.

Ta'rif. *Musbat sonning moduli o‘ziga teng:*

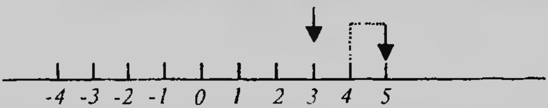
$$|a| = a \cdot |5| = 5.$$

Ta'rif. *Manfiy sonning moduli o‘ziga qarama-qarshi songa teng:*

$$|-a| = a \cdot |-5| = 5.$$

Butun sonlar bilan to‘rt amalning bajarilishini ko‘rib chiqaylik.

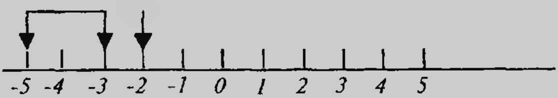
1. Butun sonlar bilan qo‘shish amali quyidagicha bajariladi, masalan 3 soniga 2 sonini qo‘shaylik (17-chizma).



17-chizma.

Butun sonlar qatorida 3 sonini belgilab, undan o‘ngga qarab ikkita sonni sanaymiz. Natijada 5 soni hosil bo‘ladi, demak, $3 + 2 = 5$.

2. -2 soniga -3 sonini qo‘shing (18-chizma).



18-chizma.

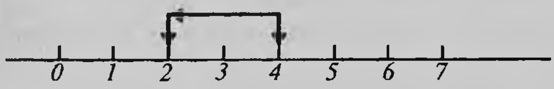
Butun sonlar to‘plamidan -2 sonini belgilab, undan chapga qarab uchta son sanaladi, natijada -5 soni hosil bo‘ladi, demak, $(-2) +$ $+ (-3) = -5$

Qoida. *Bir xil ishoradagi butun sonlarni o‘zapo qo‘shish uchun ularning modullarini o‘zaro qo‘shib, yig‘indi son oldiga qo‘shiluvchilar oldidagi ishora qo‘yiladi.*

Masalan. $5 + 4 = +(5 + 4) = +9 = 9$

$$(-3) + (-2) = -(3 + 2) = -5$$

3. 4 soniga −2 sonini qo'shing. Buning uchun butun sonlar qatorida 4 sonini belgilab, undan chapga qarab ikkita sonni sanaymiz, hosil bo'lgan son izlanayotgan son bo'ladi (19-chizma).



19-chizma.

Qoida. *Ishoralari har xil bo'lgan butun sonlarni o'zaro qo'shish uchun ularning kattasining modulidan kichigini ayirib, katta son ishorasi qo'yiladi:*

$$1)\ 5 + (-3) = 5 - 3 = +2 = 2;$$

$$2)\ (-8) + 3 = -(8 - 3) = -5.$$

Bunda $|8| > 3$, shuning uchun yig'indi son manfiy bo'ladi.

I. O'zaro qarama-qarshi sonlar yig'indisi esa nolga teng:

$$a + (-a) = 0.$$

Masalan, $5 + (-5) = 0$.

II. Butun sonlar ustida ayirish amali quyidagicha bajariladi. Bir butun sondan ikkinchi butun sonni ayirish uchun kamayuvchiga ayiriluvchiga qarama-qarshi sonni qo'shish kerak, ya'ni $(a - b)+b=a$.

1) $25 - 9 = 16$; 2) $-15 - 30 = -15 + (-30) = -45$;
3) $-12- (-13) = -12 + 13 = 1$.

1. Har xil ishorali ikkita butun sonni ko'paytirish uchun bu sonlarning modulini ko'paytirish va hosil bo'lgan son oldiga «minus» ishorasini qo'yish kerak:

$$a(-b) = -(ab) = -ab, \qquad 2\cdot(-3) = -(2\cdot3) = -6.$$

2. Ikkita butun manfiy sonni o'zaro ko'paytirish uchun ularning modullarini o'zaro ko'paytirish kerak:

$$(-a)\cdot(-b) = a\cdot b.$$

$$(-5)\cdot(-3) = 5\cdot3 = 15.$$

3. Agar ko'paytuvchilardan biri nolga teng bo'lsa, u holda ko'paytma nolga teng bo'ladi:

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

IV. Butun sonlarni bo‘lish amali quyidagicha bajariladi.

1. Butun manfiy sonni manfiy songa bo‘lish uchun bo‘linuvchining modulini bo‘luvchining moduliga bo‘lish kerak:

$$(-a) : (-b) = |-a| : |-b| = a : b;$$

$$(-81):(-3) = |-81| : |-3| = 81 : 3 = 27.$$

2. Har xil ishorali ikkita butun sonni o‘zaro bo‘lish uchun bo‘linuvchining modulini bo‘luvchining moduliga bo‘lish va hosil bo‘lgan sonning oldiga «minus» ishorasini qo‘yish kerak:

$$(-a) : b = |-a| : b = \quad (-15) : 3 = |-15| : 3 = -5.$$

3. Nolni nolga teng bo‘lmagan har qanday butun songa bo‘lishda nol soni hosil bo‘ladi:

$$0 : a = 0$$

4. Ixtiyoriy butun sonni nol soniga bo‘lish mumkin emas:

$$a : 0 = \text{ma'nosizlik.}$$

4-§. Kasr son tushunchasini kiritish va uni o‘rgatish metodikasi

Butun sonlar to‘plamida har doim qo‘shish, ayirish, ko‘paytirish amallarini bajarish o‘rinlidir, lekin bo‘lish amali har doim bajarilavermaydi. Chunki bir butun sonni ikkinchi butun songa bo‘lganda har doim bo‘linmada butun son hosil bo‘lavermaydi.

Masalan, 7:2 = 3.5, 9:4 = 2 , ... Bunda hosil qilingan bo‘linmadagi 3,5; 2 , ... sonlari butun sonlar to‘plamida mavjud emas. Umuman olganda $m\cdot x=n$, $m\neq 0$ ko‘rinishdagi tenglamaning yechimi butun sonlar to‘plamida har doim mavjud emas, bu tenglama har doim $x=\dfrac{n}{m}$ ko‘rinishdagi yechimga ega bo‘lishi uchun kasr tushunchasini kiritish orqali butun sonlar to‘plamini kengaytirib, unga barcha manfiy va musbat kasr sonlarni qo‘shish kerak. Bu degan so‘z $\left\{-\dfrac{p}{q}, 0, \dfrac{p}{q}\right\}$ ko‘rinishdagi ratsional sonlar to‘plamini hosil qilish kerak deganidir. Shundagina $mx=n$ ko‘rinishdagi tenglamalar har doim yechimga ega bo‘ladi. Bunda r va q lar natural sonlardir. Yuqoridagi mulohazalarga ko‘ra ratsional songa quyidagicha ta’rif berish mumkin: $\frac{p}{q}$ *ko‘rinishdagi qisqarmas kasrga ratsional son deyiladi.*

Endi kasr tushunchasini kiritish uchun foydalaniladigan misollarni ko‘rib o‘taylik.

Agar bir metr uzunlikdagi yog‘ochni o‘zaro teng ikki bo‘lakka bo‘linsa, u holda bo‘laklarning har birining uzunligi ana shu yog‘och uzunligining yarmiga teng bo‘ladi va uni $\frac{1}{2}$ kabi yoziladi. Agar ana shu bir metr uzunlikdagi yog‘ochni o‘zaro teng uch bo‘lakka bo‘linsa, u holda bo‘laklardan har birining uzunligi shu yog‘och uzunligining uchdan biriga teng bo‘ladi va uni $\frac{1}{3}$ kabi yoziladi. Shuningdek, $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6} \ldots$

Agar bir metr uzunlikdagi yog‘ochni teng uch bo‘lakka bo‘lib, undan ikki qismini oladigan bo‘lsak, olingan uzunligini kabi yoziladi.

Agar ana shu yog‘ochni to‘rt bo‘lakga bo‘lib, undan uch qismini olinsa, olingan qism uzunligi $\frac{3}{4}$ kabi ifodalanadi. Yuqorida qilingan mulohazalarga asoslanib kasr tushunchasining ta’rifini quyidagicha berish mumkin.

Ta’rif. *Butun sonning o‘zaro teng bo‘lgan ma’lum bir ulushi, shu sonning kasri deyiladi.*

Yuqorida $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ kasr sonlar hosil qilindi. Berilgan narsalarni yoki butun sonni qancha teng qismga bo‘linganligini ko‘rsatuvchi sonni kasrning ***maxraji***, shunday qismdan nechtasi olinganligini ko‘rsatuvchi sonni kasrning ***surati*** deyiladi. Maxraj kasr chizig‘ining ostida, surat esa kasr chizig‘ining ustiga yoziladi.

Umumiy holda kasrni $\frac{p}{q}$ ko‘rinishda ifodalanadi. Bunda r — kasrning surati, q — kasrning maxraji deb yuritiladi. $\frac{p}{q}$ ko‘rinishdagi kasrlarga qarama-qarshi kasrlarni $-\frac{p}{q}$ ko‘rinishda ifodalanadi.

Koordinata o‘qida $-\frac{p}{q}$ ko‘rinishdagi kasrlar nol sonidan chapda joylashgan bo‘ladi. Biz butun sonlar to‘plamini kengaytirish orqali $-\frac{p}{q}$ va $\frac{p}{q}$ ko‘rinishdagi kasrlarni hosil qildik. Natijada koordinata o‘qida $\{-\frac{p}{q}, 0, \frac{p}{q}\}$ ko‘rinishdagi sonlar to‘plami hosil bo‘ldi.

Bunday to‘plam ***ratsional sonlar to‘plami*** deb ataladi. Agar ratsional sonlar to‘plamidagi $-\frac{p}{q}$ va $\frac{p}{q}$ kasrlarning maxrajlari $q = 1$ desak, ma'lum bo‘lgan butun sonlar to‘plami hosil bo‘ladi. Bundan ko‘rinadiki, butun sonlar ratsional sonlar to‘plamining xususiy bir holi ekan. Ratsional sonlar to‘plami bilan koordinata to‘g‘ri chizig‘i nuqtalari orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatish mumkinmi, degan savol tug‘ilishi tabiiydir. Bu savolga quyidagicha javob berishimiz mumkin, aksincha, har bir nuqtaga bittadan ratsional soni mos keltirish mumkin emas.

Kasrlar uch xil bo‘ladi:

1. To‘g‘ri kasrlar. 2. Noto‘g‘ri kasrlar. 3. O‘nli kasrlar.

1. Agar kasrning surati uning maxrajidan kichik bo‘lsa, bunday kasrlarni ***to‘g‘ri kasrlar*** deyiladi. Masalan: $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{6}$ ....

2. Agar kasrning surati uning maxrajidan katta bo‘lsa, bunday kasrlarni ***noto‘g‘ri kasrlar*** deyiladi. Masalan, $\frac{5}{2}, \frac{7}{4}, \frac{17}{5}$... .

3. Agar kasrning maxraji bir va nol sonlaridan iborat bo‘lsa, bunday kasrlarni ***o‘nli kasrlar*** deyiladi. Masalan, $\frac{1}{10}=0,1$; $\frac{1}{100}=0,01$; ... .

Kasr tushunchasi kiritilganidan keyin kasrlarning tengligi tushunchasi kiritiladi. Bu tushunchani o‘quvchilarga quyidagicha tushuntirish mumkin.

Faraz qilaylik, bizga bir metr uzunlikdagi kesma berilgan bo‘lsin. Agar shu kesmani teng ikkiga bo‘lsak, har bir kesmaning uzunligi $\frac{1}{2}$

kabi kasr bilan ifodalanadi. Endi bo'lingan har bir kesmani yana ikkiga bo'lsak, har bir kesmaning uzunligi $\frac{1}{4}$ kasr bilan ifodalanadi. Ana shu teng to'rtga bo'lingan kesmalardan ikkitasining uzunligi $\frac{2}{4}$ kasr bilan ifodalanadi. Bu esa butun kesma uzunligining teng ikkiga bo'lgandagi $\frac{1}{2}$ kasr bilan ifodalangan qiymatiga tengdir. Shuning uchun $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{4}{8}$. Bundan ko'rinadiki, $\frac{1}{2}$ va $\frac{2}{4}$ kasrlarning qiymatlari teng bo'lib, ularni ifoda qilish har xildir.

O'quvchilarga kasrlarning tengligi tushunchasini tushuntirilganidan so'ng kasrning quyidagi xossalarini ifoda qilish mumkin.

I xossa. Agar kasrning surat va maxrajini bir xil songa ko'paytirilsa, kasrning qiymati o'zgarmaydi: $\frac{p}{q}=\frac{p}{q}\cdot\frac{n}{n}$.

1) $\frac{2}{5}=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{2}=\frac{4}{10}$;

2) $\frac{3}{7}=\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{4}=\frac{12}{28}$;

3) $1=\frac{1}{1}=\frac{1}{1}\cdot\frac{4}{4}=\frac{4}{4}=\frac{4\cdot 25}{4\cdot 25}=\frac{100}{100}$.

II xossa. Agar kasrning surat va maxrajini bir xil songa bo'linsa, kasrning qiymati o'zgarmaydi. $\frac{p:n}{q:n}=\frac{q}{n}$. Bunda $n>1$ bo'lishi kerak.

Misollar. 1) $\frac{4}{8}=\frac{4}{4\cdot 2}=\frac{1}{2}$; 2) $\frac{15}{3}=\frac{3\cdot 5}{3}=\frac{5}{1}=5$.

III xossa. Agar kasrning surat va maxrajidagi sonlar umumiy bo'luvchilarga ega bo'lmasa, u holda bunday kasr qisqarmas kasr bo'ladi. Masalan, $\frac{5}{7}, \frac{4}{5}, \frac{17}{19}, \ldots$ qisqarmas kasrlardir, chunki 5 va 7, 4 va 5, 17 va 19 sonlari o'zaro umumiy bo'luvchilarga ega emas.

5-§. Kasrlarni taqqoslash

1. Kasrlarni o'zaro taqqoslash uchun berilgan kasrlarni o'zaro bir xil maxrajli kasrlar holiga keltirish kerak, so'ngra ulardan qaysi birining surati katta bo'lsa, o'sha kasrning qiymati katta bo'ladi.

Masalan: $\frac{3}{4}$ va $\frac{2}{5}$; $\frac{3\cdot 5}{4\cdot 5}=\frac{15}{20}$ va $\frac{2\cdot 4}{5\cdot 4}=\frac{8}{20}$, $\frac{15}{20}>\frac{8}{20}$ shuning uchun $\frac{3}{4}>\frac{2}{5}$. Bu yerda kasrning surati va uning maxrajini bir xil songa ko'paytirilsa, kasrning qiymati o'zgarmaydi degan xossadan foydalandik.

2. Suratlari bir xil va maxrajlari har xil bo'lgan kasrlardan qaysi birining maxraji katta bo'lsa, o'sha kasr kichik bo'ladi. Qaysi birining maxraji kichik bo'lsa, o'sha kasr katta bo'ladi.

Masalan: $\frac{4}{15}$ va $\frac{4}{21}$ lar uchun $\frac{4}{15}>\frac{4}{21}$.

6-§. Kasrlarni qo'shish

Faraz qilaylik, AB kesma berilgan bo'lsin, uni teng yettiga bo'laylik, ulardan $AC=\frac{1}{7}$, $CD=\frac{3}{7}$, $AD=\frac{4}{7}$ bo'lsin, u holda AD kesmaning qiymati AC va CD kesmalar uzunliklarining yig'indisiga teng bo'ladi, ya'ni $AD=AC+CD$. Shu bilan birga $\frac{1}{7}+\frac{3}{7}=\frac{4}{7}$. Yuqoridagi mulohazaga ko'ra quyidagi qoidani yozish mumkin.

I. Maxrajlari bir xil bo'lgan kasrlarni qo'shish uchun ularning suratlarini o'zaro qo'shib, maxrajlaridan bittasini yozish kifoya.

$$\frac{p}{q}+\frac{r}{q}=\frac{p+r}{q}; \qquad \frac{3}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3+1}{5}=\frac{4}{5}.$$

II. Maxrajlari har xil bo'lgan kasrlarni qo'shish uchun ularni eng kichik umumiy maxrajga keltirib, bir xil maxrajli kasrlarni qo'shish qoidasidan foydalanib, qo'shish kifoya:

$$1)\quad \frac{2}{5}+\frac{3}{7}=\frac{2\cdot 7}{5\cdot 7}+\frac{3\cdot 5}{7\cdot 5}=\frac{14}{35}+\frac{15}{35}=\frac{14+15}{35}=\frac{29}{35};$$

$$2)\quad \frac{3}{4}+\frac{1}{6}=\frac{3\cdot 6}{4\cdot 6}+\frac{1\cdot 4}{6\cdot 4}=\frac{18}{24}+\frac{4}{24}=\frac{18+4}{24}=\frac{22}{24}=\frac{11}{12}.$$

Umumiy holatda esa $\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{p\cdot s}{q\cdot s}+\frac{r\cdot q}{s\cdot q}=\frac{ps+rq}{sq}$.

III. Yig'indida butun son chiqadigan kasrlarni qo'shish quyidagicha amalga oshiriladi:

$$1)\quad \frac{3}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3+1}{4}=\frac{4}{4}=1,$$

$$2)\quad \frac{1}{8}+\frac{7}{8}=\frac{1+7}{8}=\frac{8}{8}=1,$$

$$3)\quad \frac{2}{4}+\frac{1}{2}=\frac{2}{4}+\frac{2\cdot 1}{2\cdot 2}=\frac{2+2}{4}=\frac{4}{4}=1.$$

IV. Butun sonni kasrga qo'shish

$$1)\quad 3+\frac{1}{2}=3\frac{1}{2};$$

$$2)\quad 3+\frac{1}{2}=\frac{3}{1}+\frac{1}{2}=\frac{3\cdot 2+1}{1\cdot 2}=\frac{6+1}{2}=\frac{7}{2}=3\frac{1}{2}.$$

V. Aralash sonni kasrga qo'shish

$$3\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=3+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)=3+\left(\frac{3}{4}+\frac{1\cdot 2}{2\cdot 2}\right)=$$

$$=3+\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{4}\right)=3+\left(\frac{3+2}{4}\right)=3+\frac{5}{4}=4+\frac{1}{4}=4\frac{1}{4}.$$

VI. Aralash sonni aralash songa qo'shish:

$$2\frac{1}{3}+3\frac{1}{2}=(2+3)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=5+\left(\frac{1\cdot 2}{3\cdot 2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 3}\right)=5+\frac{2+3}{6}=5+\frac{5}{6}=5\frac{5}{6}.$$

Qo'shish qonunlari. 1. Kasr qo'shiluvchilarning o'rni almashgani bilan yig'indi kasr sonning qiymati o'zgarmaydi:

Misol. $\frac{a}{q}+\frac{b}{q}=\frac{a+b}{q}=\frac{b+a}{q}=\frac{b}{q}+\frac{a}{q}.$

$$\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3+1}{5}=\frac{1+3}{5}=\frac{1}{5}+\frac{3}{5}.$$

2. Kasr sonlarda qo'shish amaliga nisbatan guruhlash qonuni o'rinlidir:

$$\left(\frac{a}{q}+\frac{b}{q}\right)+\frac{c}{q}=\frac{a}{q}+\left(\frac{b}{q}+\frac{c}{q}\right).$$

Isboti.

$$\left(\frac{a}{q}+\frac{b}{q}\right)+\frac{c}{q}=\frac{a+b}{q}+\frac{c}{q}=\frac{(a+b)+c}{q}=\frac{c+(b+a)}{q}=\frac{a}{q}+\frac{b+c}{q}=\frac{a}{q}+\left(\frac{b}{q}+\frac{c}{q}\right).$$

Misol.

$$\frac{1}{7}+\frac{3}{5}+\frac{2}{7}=\left(\frac{1}{7}+\frac{2}{7}\right)+\frac{3}{5}=\frac{1+2}{7}+\frac{3}{5}=\frac{3}{7}+\frac{3}{5}=\frac{3\cdot 5}{7\cdot 5}+\frac{3\cdot 7}{5\cdot 7}=\frac{15+21}{35}=\frac{36}{35}.$$

7-§. Kasrlarni ayirish

1) Faraz qilaylik, bizga AB kesma berilgan bo'lib, u teng 7 bo'lakka bo'lingan bo'lsin.

Ulardan $AC=\frac{1}{7}$, $CD=\frac{3}{7}$, $AD=\frac{4}{7}$ larga teng bo'lsin. CD kesmaning qiymati $CD=AD-AC$ bo'ladi, u holda $\frac{4}{7}-\frac{1}{7}=\frac{3}{7}$ tenglik o'rinli.

2) Karim ikki mashinadagi yukni $\frac{5}{7}$ soatda tushirdi. U birinchi mashinadagi yukni $\frac{3}{7}$ soatda tushirib bo'ldi. Karim ikkinchi mashinadagi yukni necha soatda tushirgan? $\frac{5}{7}-\frac{3}{7}=\frac{2}{7}$. Topilgan natijaning to'g'riligini tekshirish qo'shish amali orqali amalga oshiriladi: $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{2+3}{7}=\frac{5}{7}$.

Endi kasrlarni ayirish uchun chiqarilgan quyidagi qoidalar ko'rib chiqiladi:

I. Maxrajlari bir xil bo'lgan kasrlarni ayirish uchun ularning suratlarini o'zaro ayirib, maxrajlardan bittasini maxraj qilib yozish kifoya:

$$1)\ \frac{3}{5}-\frac{1}{5}=\frac{3-1}{5}+\frac{2}{5};\qquad 2)\ \frac{4}{7}-\frac{3}{7}=\frac{4-3}{7}=\frac{1}{7}.$$

II. Maxrajlari har xil bo'lgan kasrlarni ayirish uchun ularni eng kichik umumiy maxrajga keltirib, bir xil maxrajli kasrlarni ayirish qoidasidan foydalaniladi:

$$\frac{3}{4}-\frac{2}{7}=\frac{3\cdot 7}{4\cdot 7}-\frac{2\cdot 4}{7\cdot 4}=\frac{21-8}{28}=\frac{13}{28}.$$

Umumiy holda: $\frac{p}{q}-\frac{r}{s}=\frac{p\cdot s}{q\cdot s}-\frac{r\cdot q}{s\cdot q}=\frac{ps-rq}{sq}.$

III. Butun sondan kasrni ayirish:

1- usul. $4-\frac{2}{3}=\frac{4}{1}-\frac{2}{3}=\frac{4\cdot 3}{1\cdot 3}-\frac{2}{3}=\frac{12}{3}-\frac{2}{3}=\frac{12-2}{3}=\frac{10}{3}.$

2- usul. $4-\frac{2}{3}=3+\left(\frac{3}{3}-\frac{2}{3}\right)=3+\left(\frac{3-2}{3}\right)=3+\frac{1}{3}=3\frac{1}{3}.$

IV. Kasrdan butun sonni ayirish:

$$\frac{3}{7}-2=-\left(2-\frac{3}{7}\right)=-\left(\frac{2\cdot 7}{1\cdot 7}-\frac{3}{7}\right)=-\left(\frac{14}{7}-\frac{3}{7}\right)=-\frac{14-3}{7}=-\frac{11}{7}=-1\frac{4}{7}.$$

V. Butun sondan aralash sonni ayirish:

$$5-2\frac{1}{4}=4\frac{5}{5}-2\frac{1}{4}=(4-2)+\left(\frac{5}{5}-\frac{1}{4}\right)=2+\left(\frac{5\cdot 4}{5\cdot 4}-\frac{1\cdot 5}{4\cdot 5}\right)=$$

$$=2+\frac{20-5}{20}=2+\frac{15}{20}=2+\frac{3}{4}=2+\frac{3}{4}=2\frac{3}{4}.$$

VI. Aralash sondan butun sonni ayirish:

$$1)\quad 3\frac{3}{4}-2=(3-2)+\left(\frac{3}{4}-0\right)=1+\frac{3}{4}=1\frac{3}{4}.$$

$$2)\quad 3\frac{3}{4}-2=\frac{15}{4}-\frac{2}{1}=\frac{15}{4}-\frac{2\cdot 4}{1\cdot 4}=\frac{15-8}{4}=\frac{7}{4}=1\frac{3}{4}.$$

VII. 1 sonidan kasr sonni ayirish:

$$1-\frac{3}{4}=\frac{1}{1}-\frac{3}{4}=\frac{1\cdot 4}{1\cdot 4}-\frac{3}{4}=\frac{4-3}{4}=\frac{1}{4}.$$

VIII. 1 sonidan aralash sonni ayirish:

1 -usul. $1-3\frac{1}{2}=-\left(3\frac{1}{2}-1\right)=\left[(3-1)+\left(\frac{1}{2}-0\right)\right]=-\left(2+\frac{1}{2}\right)=-2\frac{1}{2}.$

2 -usul. $1-3\frac{1}{2}=\frac{1}{1}-\frac{7}{2}=\frac{1\cdot 2}{1\cdot 2}-\frac{7}{2}=\frac{2-7}{2}=\frac{-5}{2}=-2\frac{1}{2}.$

8-§. Kasrlarni ko'paytirish

1. Kasrni butun songa ko'paytirish uchun shu butun sonni kasrning suratiga ko'paytirish kifoya:

1) $\frac{5}{17}\cdot 3=\frac{5\cdot 3}{17}=\frac{15}{17}$; 2) $\frac{2}{9}\cdot(-4)=\frac{2\cdot(-4)}{9}=-\frac{8}{9}$. Ko'paytirish qoidasiga ko'ra $\frac{5}{17}\cdot 3$, $\frac{2}{9}\cdot(-4)$ ifodalarni quyidagicha yozish mumkin:

1) $$\frac{5}{17}\cdot 3=\frac{5}{17}+\frac{5}{17}+\frac{5}{17}=\frac{5+5+5}{17}=\frac{15}{17};$$

2) $$\frac{2}{9}\cdot(-4)=-\frac{2}{9}\cdot 4=\frac{-2}{9}-\frac{2}{9}-\frac{2}{9}-\frac{2}{9}=-\left(\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\right)=-\frac{8}{9}.$$

2. Aralash sonni butun songa ko'paytirish uchun aralash sonni noto'g'ri kasrga aylantirib, butun sonni uning suratiga ko'paytirish kifoya:

1. *a*) $$2\frac{1}{2}\cdot 3=\frac{2\cdot 2+1}{2}\cdot 3=\frac{5}{2}\cdot 3=\frac{5\cdot 3}{2}=\frac{15}{2}=7\frac{1}{2}.$$

b) $$2\frac{1}{2}\cdot 3=2\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}+2\frac{1}{6}=6+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=$$

$$=6+\left(\frac{1+1+1}{2}\right)=6+\frac{3}{2}=7\frac{1}{2}.$$

2. *a*) $$3\frac{3}{4}(-2)=\frac{3\cdot 4+3}{4}\cdot(-2)=\frac{15}{4}\cdot(-2)=\frac{15\cdot(-2)}{4}=$$

$$=-\frac{30}{4}=-\frac{15\cdot 2}{2\cdot 2}=-\frac{15}{2}=-7\frac{1}{2}.$$

b) $3\frac{3}{4}(-2)=-3\frac{3}{4}\cdot 2=-3\frac{3}{4}+\left(-3\frac{3}{4}\right)=-\left(3\frac{3}{4}+3\frac{3}{4}\right)=$

$$=-\left(6+\frac{3+3}{4}\right)=-\left(6+\frac{6}{4}\right)=-7\frac{1}{2}.$$

3. Kasrni kasrga ko'paytirish uchun ularning suratlarini suratlariga va maxrajlarini maxrajlariga ko'paytirish kifoya:

$$\frac{p}{q}\cdot\frac{s}{r}=\frac{p\cdot s}{q\cdot r}.$$

Misol. 1) $\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{9}=\frac{2\cdot 5}{7\cdot 9}=\frac{10}{63}$; 2) $\frac{7}{11}\cdot\frac{2}{5}=\frac{7\ 2}{11\cdot 5}=\frac{14}{55}$.

4. Aralash sonlarni o'zaro ko'paytirish uchun ularning har birini noto'g'ri kasrga aylantirib, suratlarini suratlariga va maxrajlarini maxrajlariga o'zaro ko'paytirish kifoya:

1) $2\frac{1}{3}\cdot 4\frac{2}{5}=\frac{7}{3}\cdot\frac{22}{5}=\frac{7\cdot 22}{3\cdot 5}=\frac{154}{15}=10\frac{4}{15}$.

2) $7\frac{2}{3}\cdot 2\frac{1}{2}=\frac{23}{3}\cdot\frac{5}{2}=\frac{23\cdot 5}{3\cdot 2}=\frac{115}{6}=19\frac{1}{6}$.

Kasrlarni ko'paytirish o'rin almashtirish, guruhlash va taqsimot qonunlariga bo'ysunadi.

1. Kasrlarni ko'paytirishda ko'paytuvchilarning o'rin almashgani bilan ko'paytmaning qiymati o'zgarmaydi:

1) $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{7}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 7}=\frac{8}{21}$; 2) $\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{21}$.

2. Kasrlarni ko'paytirishda ularni guruhlab ko'paytirilsa, ko'paytmaning qiymati o'zgarmaydi:

1) $\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{3}{7}=\left(\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\right)\cdot\frac{3}{7}=\frac{8}{15}\cdot\frac{3}{7}=\frac{24}{105}$.

2) $\left(\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{4}{5}=\left(\frac{3\cdot 2}{7\cdot 3}\right)\cdot\frac{4}{5}=\frac{6}{21}\cdot\frac{4}{5}=\frac{6\cdot 4}{21\cdot 5}=\frac{24}{105}$.

3. Kasrlarni ko'paytirishda ularga taqsimot qonunini tatbiq qilinsa, ko'paytmaning qiymati o'zgarmaydi:

$$\left(\frac{a+b}{c}\right)\cdot\frac{p}{q}=\left(\frac{(a+b)p}{cd}\right)=\frac{ap+bp}{cd}.$$

Misol.

1) $$\left(\frac{4+3}{9}\right)\cdot\frac{4}{5}=\frac{(4+3)\cdot4}{9\cdot5}\cdot\frac{4\cdot4+3\cdot4}{9\cdot5}=\frac{16+12}{45}\cdot\frac{28}{45};$$

2) $$\left(\frac{7+2}{11}\right)\cdot\frac{2}{3}=\frac{(7+2)\cdot2}{11\cdot3}\cdot\frac{7\cdot2+2\cdot2}{11\cdot3}=\frac{14+4}{11\cdot3}\cdot\frac{18}{33}.$$

9-§. Kasrlarni bo'lish

5-sinf matematika kursida kasrlarni bo'lish mavzusi o'tiladi. Bizga butun sonlar mavzusidan ma'lumki, ikkita butun sonni o'zaro bo'lish uchun birinchisini ikkinchi sonning teskarisiga ko'paytirish kerak edi. Shuningdek, ikki kasr sonni ham o'zaro bo'lish uchun birinchi kasrni ikkinchi kasrning teskarisiga ko'paytirish kerak, ya'ni:

$$\frac{15}{27}:\frac{2}{3}=\frac{15}{27}\cdot\frac{3}{2}=\frac{45}{54}.$$

Bu qoidani quyidagi masala orqali o'quvchilarga tushuntirish maqsadga muvofiqdir.

Masala. $\frac{6}{7}$ bo'lagi (qismi) 30 ga teng bo'lgan sonni toping.

Y e c h i s h. Noma'lum sonni x bilan belgilasak, u holda masala shartini quyidagicha yozish mumkin: $\frac{6}{7}\cdot x=30$, chunki sonning bo'lagi ko'paytirish amali yordamida topiladi.

Bu tenglik bunday yechiladi: $\frac{1}{7}x=30:6=5$. Bundan x = 5·7 = 35 bo'ladi, Demak, izlanayotgan son 35 ekan.

Masala. Futbol maydoni yuzining $\frac{3}{4}$ qismi o'yin o'ynash uchun tayyor holga keltirildi. Bu 960 m^2 ni tashkil qiladi. Futbol maydonning yuzi qancha?

Y e c h i s h. Futbol maydonning yuzini x bilan belgilasak, shartga ko'ra bu maydonning $\frac{3}{4}$ qismi 960 m^2 edi, shuning uchun $\frac{3}{4}x=960$ tenglik o'rinli bo'ladi. x ni topish uchun tenglamaning ikkala qismini $\frac{3}{4}$ ga bo'lish kerak. Demak, $x = 960 : \frac{3}{4} = 960 \cdot \frac{4}{3} = 320 \cdot 4 = 1280$ m^2.

Futbol maydonining yuzi 1280 m^2 ekan.

Berilgan kasrning qiymati bo'yicha sonning o'zini topishda ham sonning kasrni topishdek, turli hollarni ko'rib o'tish maqsadga muvofiqdir. Sonni kasrga bo'lish ta'rifi butun sonlarni bo'lish ta'rifidek ifodalanadi. Bu qoidani o'quvchilarga alohida ta'kidlab tushuntirish maqsadga muvofiqdir. Shundan keyin kasrlarni bo'lishga doir quyidagi hollarni ko'rib chiqish foydalidir.

1. Kasrni butun songa bo'lish uchun kasrni o'z holicha, butun sonni esa teskari yozib, ularni o'zaro ko'paytirish kifoya:

$$\frac{5}{7} : 4 = \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5 \cdot 1}{7 \cdot 4} = \frac{5}{28}.$$

2. Aralash sonni butun songa bo'lish uchun aralash sonni noto'g'ri kasrga aylantirib, so'ngra bo'lish kasrni butun songa bo'lishdek bajariladi:

$$2\frac{5}{7} : 4 = \frac{19}{7} : 4 = \frac{19}{7} \cdot \frac{1}{4} = \frac{19}{28}.$$

3. Butun sonni aralash songa bo'lish uchun butun sonni o'z holicha yozib, aralash sonni noto'g'ri kasrga aylantirib, ularni o'zaro ko'paytirish kerak:

$$4 : 1\frac{3}{5} = 4 : \frac{8}{5} = 4 \cdot \frac{5}{8} = \frac{20}{8} = 2\frac{4}{8} = 2\frac{1}{2}.$$

4. Aralash sonni aralash songa bo'lish uchun ularning har birini noto'g'ri kasrlarga aylantirib, so'ngra bo'lishni ikki kasrni o'zaro bo'lish qoidasiga ko'ra bajariladi:

$$2\frac{3}{5} : 3\frac{2}{7} = \frac{13}{5} \cdot \frac{23}{7} = \frac{13}{5} \cdot \frac{7}{23} = \frac{13 \cdot 7}{5 \cdot 23} = \frac{91}{115}.$$

10-§. O'nli kasrlar va ular bilan to'rt amalni bajarish metodikasi

O'nli kasr tushunchasi XV asrda Samarqandlik olim Ali Qushchi tomonidan kiritilgan. U o'zining 1427-yilda yozgan «Hisobot san'atiga kalit», «Arifmetika kaliti» nomli kitobida o'nli kasr tushunchasidan foydalangan.

Ta'rif. *Maxraji o'n yoki uning darajalaridan iborat bo'lgan kasr o'nli kasr deyiladi.*

O'nli kasrlarni bunday belgilash qabul qilingan:

$$\frac{1}{10}=0,1;\quad \frac{1}{100}=0,01;\quad \frac{1}{1000}=0,001;\quad \frac{3}{10}=0,3;\quad \frac{3}{1000}=0,003.$$

O'nli kasrlarni maxrajsiz yozilganda verguldan o'ngdagi birinchi xonadagi raqam o'ndan birlarni, ikkinchi xonadagilari esa yuzdan birlarni va hokazolarni bildiradi. Masalan, 6,732 o'nli kasrda verguldan keyingi sonlarni turgan o'rniga qarab kasr ko'rinishda quyidagicha ifodalash mumkin: $\frac{7}{10};\ \frac{3}{100};\ \frac{2}{1000}$.

O'nli kasrlar uchun quyidagi qoidalar o'rinlidir:

1. Har bir o'nli kasr o'zidan oldingi o'nli kasrga nisbatan o'n marta kattadir.

Masalan, $0,001=\frac{1}{1000};\quad 0,01=\frac{1}{100};\quad 0,1=\frac{1}{10}.$

2. O'nli kasrlarning maxrajlari 10 ning butun ko'rsatkichli darajalaridan, suratlari esa bir xonali sonlardan iborat kasrlarning yig'indisi shaklda ifodalash mumkin.

11-§. O'nli kasrlarni qo'shish va ayirish

Bu mavzu materialini bayon qilishdan oldin o'qituvchi o'quvchilarga maxrajlari har xil bo'lgan oddiy kasrlarni umumiy maxrajlarga keltirib qo'shish va ayirish haqidagi tushunchani misollar yordamida ko'rsatishi, so'ngra o'nli kasrlarni qo'shish hamda ayirish haqidagi nazariy va amaliy bilimlarni berishi maqsadga muvofiqdir.

1- qoida. *O'nli kasrlarni qo'shish uchun bir xil xonalari o'zaro butun sonlar kabi qo'shilib, yig'indida kasrlardagi vergulning tagiga to'g'ri keltirib butun qismi ajratiladi.*

Misol.

1) $$\begin{array}{r} +\ 25,382 \\ 7,200 \\ \hline 32,582 \end{array}$$

2-qoida. *O'nli kasrlarni ayirish uchun kamayuvchining tagiga ayirluvchining verguliga to'g'rilab, o'rin qiymati bir xil bo'lgan raqamlar bir-birini ostiga yozib ayriladi, so'ngra ayirmani butun qismi vergul bilan ajratiladi.*

Misol.

1) $\begin{array}{r} 14{,}273 \\ +\ 5{,}040 \\ \hline 9{,}233 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 27{,}100 \\ -\ 3{,}236 \\ \hline 23{,}864 \end{array}$ 3) $27{,}1-3{,}235=?$

O'nli kasrlarni ayirish jarayonida quyidagi hollar bo'lishi mumkin: ayiriluvchidagi kasr xonalarining soni kamayuvchidagi kasr xonalaridan ko'p, kamayuvchi va ayiriluvchi o'nli kasrlardagi kasr xonalari soni bir xil, butun sondan o'nli kasrni ayirish, o'nli kasrdan butun sonni ayirish. O'qituvchi bu hollarning har biriga misollar ko'rsatishi kerak.

12-§. O'nli kasrlarni ko'paytirish

O'nli kasrlarni o'zaro ko'paytirishni oddiy kasrlarni ko'paytirish qoidasiga asoslangan holda tushuntirishi lozim, chunki o'quvchilar o'nli kasrlarni oddiy kasrlarga aylantirish qoidasini biladilar.

Misol: $3{,}2\cdot 0{,}12 = 3\frac{2}{10}\cdot\frac{12}{100} = \frac{32}{10}\cdot\frac{12}{100} = \frac{32\cdot 12}{10\ 100} = \frac{384}{1000} = 0{,}384$.

Ko'paytma kasrning maxrajida nechta nol bo'lsa, uni maxrajsiz yoziladigan o'nli kasrga aylantirganda shuncha kasr xonasi bo'lishini o'quvchilarga tushuntirish lozim.

$$1)\quad 3{,}2\cdot 0{,}12 = \frac{384}{1000} = 0{,}384;$$

$$2)\quad 2{,}7\cdot 1{,}3 = 2\frac{7}{10}\cdot 1\frac{3}{10} = \frac{27}{10}\ \frac{13}{10} = \frac{351}{10\cdot 10} = \frac{351}{100} = 3{,}51.$$

Ko'rib o'tilgan misollar asosida quyidagi qoidalar tushuntiriladi.

1- qoida. *O'nli kasrlarni o'zaro ko'paytirish uchun ularning suratlarini suratlariga va maxrajlarini maxrajlariga ko'paytirib, ko'paytuvchi bilan ko'payuvchida jami nechta kasr xonasi bo'lsa, ko'paytmada shuncha xona ajratiladi.* (Bu gap oddiy kasr shaklda yozilgan o'nli kasr haqida aytilgan.)

Masalan,

$$3{,}4\cdot 0{,}25 = 3\frac{4}{10}\ \frac{25}{100} = \frac{34}{10}\cdot\frac{25}{100} = 0{,}85.$$

2- qoida. *O'nli kasrlarni o'zaro ko'paytirish uchun ularning verguliga e'tibor bermay, butun sonlar kabi ko'paytirib, ko'payuvchi va ko'paytuvchida hammasi nechta kasr xonasi bo'lsa, ko'paytmaning o'ng tomonidan boshlab sanab shuncha raqamni vergul bilan ajratib qo'yiladi:*

$$
1)\quad \begin{array}{r} \times\ 30{,}021 \\ 2{,}51 \\ \hline 3021 \\ +\ 15105 \\ 6042 \\ \hline 7{,}58271 \end{array}
\qquad\qquad
2)\quad \begin{array}{r} \times\ 7{,}124 \\ 3{,}213 \\ \hline 21372 \\ 7124 \\ +\ 14248 \\ 21372 \\ \hline 22{,}889412 \end{array}
$$

O‘nli kasrlarni o‘zaro ko‘paytirishda ko‘paytirishning ko‘payuvchidagi yig‘indisiga nisbatan tarqatish qonunini qo‘llanishga asoslangan mulohazalarni ham olib borish foydali, buni quyidagicha sxema orqali ham ko‘rsatish mumkin.

Masalan, 2,37 ni 2 ta birlik, 3 ta o‘ndan bir, 7 ta yuzdan birning yig‘indisi shaklda yozish mumkin. Yig‘indini biror songa ko‘paytirish uchun har bir qo‘shiluvchini shu songa ko‘paytirish va hosil bo‘lgan ko‘paytmalarni qo‘shish, ya’ni 2 birlikni 9 ga, 3 ta o‘ndan birni 9 ga, 7 ta yuzdan birni 9 ga ko‘paytirib, ko‘paytmalarni o‘zaro qo‘shish kifoya:

$$
2{,}37\cdot 9 = 9\left(1+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{100}+\frac{1}{100}+\frac{1}{100}+\frac{1}{100}+\right.
$$

$$
\left.+\frac{1}{100}+\frac{1}{100}\right)=9+9+\frac{9}{10}+\frac{9}{10}+\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{100}+\frac{9}{100}+\frac{9}{100}+
$$

$$
+\frac{9}{100}+\frac{9}{100}+\frac{9}{100}=\frac{2133}{100}=21{,}33.
$$

O‘nli kasrlarni 10 ning butun ko‘rsatkichli darajalariga ko‘paytirishni alohida ko‘rib o‘tish lozim, ya’ni o‘nli kasrni 10 ga, 100 ga, 1000 ga va hokazolarga ko‘paytirish uchun bu kasrda vergulni 1, 2, 3, ... raqam o‘ngga surish kerak. O‘nli kasrlarni 0,1, 0,01, 0,001 ga va hokazolarga ko‘paytirish uchun bu kasrlarda vergulni 1, 2, 3, ... raqam chapga surish kifoya.

Masalan: 1) $3{,}7\cdot 100 = 3{,}70\cdot 100 = 370$. Bu misolni quyidagicha tushuntirish mumkin: 3,7 ni 100 ga ko‘paytirish uchun qoidaga ko‘ra, 3,7 sonidagi vergulni o‘ngga qarab ikki xona surish kerak edi, ammo bizda verguldan keyin bitta son bor, xolos. Shuning uchun 7 sonidan keyin bitta nol qo‘yamiz. (Bu yerda o‘qituvchi o‘quvchilarga 3,7 soni 3,70 soniga teng ekanligini tushuntirish va kasr holga keltirib ko‘rsatish maqsadga muvofiqdir.)

1) $45{,}76 \cdot 0{,}1 = 4{,}576$. Bu misolni quyidagicha tushuntirish mumkin. Buning uchun 4576 sonini 1 soniga ko‘paytirib hosil bo‘lgan ko‘paytmada o‘ngdan chapga qarab uchta raqamni — ikkala ko‘paytuvchida ular nechta bo‘lsa, shuncha raqamni vergul bilan ajratamiz. Shunday mulohaza yuritib, 45,76 ni 0,01 ga ko‘paytirishda 45,76 sonidan vergulni ikki raqam chapga surish kerakligini ko‘rsatamiz.

Masalan: $45{,}76 \cdot 0{,}01 = 0{,}4576$.

13-§. O‘nli kasrlarni bo‘lish

O‘nli kasrlarni bo‘lish mavzusida quyidagi uch hol ko‘rib o‘tiladi: 1) o‘nli kasrni butun songa bo‘lish. O‘nli kasrni butun songa bo‘lish butun sonlarni bo‘lishga o‘xshash bajariladi, bunda qoldiqlar borgan sari kichikroq ulushlarga maydalanib boradi.

Masalan,

$$0{,}6 : 4 = 0{,}60 : 4 = 0{,}15.$$

1-qoida. *O‘nli kasrlarni butun songa bo‘lish uchun, butun qism bo‘luvchiga yetadigan bo‘lsa, butunini kasr xona almashguncha bo‘lib, so‘ngra bo‘linmada vergul qo‘yib bo‘lishni davom ettirish kifoya.*

Misol:

$$
1)\quad
\begin{array}{r|l}
-\,25{,}232 & \underline{\;4\qquad} \\
\underline{24\phantom{{,}232}} & 6{,}308 \\
-\,12\phantom{{,}32} & \\
\underline{12\phantom{{,}32}} & \\
032 & \\
-\,\underline{32} & \\
0 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
-\,25232 & \underline{\;4000\qquad} \\
\underline{2400} & 6{,}308 \\
-\,12320 & \\
\underline{12000} & \\
3200 & \\
-\,\underline{3200} & \\
0 &
\end{array}
$$

Yuqoridagi misol va qoidalarni tushuntirish jarayonida o‘qituvchi o‘quvchilarga bo‘lish amalining ta’rifini va uning bajarish qoidalarini takrorlashi lozim.

2) **Butun sonni o‘nli kasrga bo‘lish.** Bu holni ham o‘qituvchi o‘quvchilarga misol yordamida tushuntirishi kerak. Masalan: $51 : 0{,}17 = ?$ Bu misolni yechishni oddiy kasrlarning bo‘lish qoidasi asosida bajarib ko‘rsatiladi.

Misol.

$$51 : 0{,}17 = 51 : \frac{17}{100} = (51 \cdot 100) : 17 = 5100 : 17 = 300.$$

Bu mulohazalarga ko‘ra quyidagi qoidani ifodalash mumkin.

Qoida. *Butun sonni o'nli kasrga bo'lish uchun bo'luvchidagi o'nli kasrni butun songa aylantirish kerak. Buning uchun bo'luvchining vergul oxiriga suriladi va necha xona surilgan bo'lsa, bo'luvchining o'ng tomoniga shuncha nol qo'yiladi hamda butun sonni butun songa bo'lish kabi bajariladi.*

Misol.

$$351:2{,}7=3510:27=130,$$

$$25:6{,}25=2500:625=4.$$

3) O'nli kasrni o'nli kasrga bo'lish. Bu holda ham o'qituvchi o'quvchilarga kasrni kasrga bo'lishning umumiy qoidasini takrorlab, so'ngra o'nli kasrlarni oddiy kasrlar holiga keltirib, kasrlarni o'zaro bo'lish usulidek ko'rsatishi maqsadga muvofiqdir.

Masalan: $8{,}51:3{,}7=\dfrac{851}{100}:\dfrac{37}{10}=\dfrac{851\cdot 10}{100\cdot 37}=\dfrac{851}{10}:37=85{,}1:37=2{,}3.$

Bu misolni yana bunday yechib ko'rsatish ham mumkin:

$$8{,}51:3{,}7=8{,}51:\frac{37}{10}=(8{,}51\cdot 10):37=85{,}1:37=2{,}3.$$

Yuqoridagi misollardan ko'rinadiki, o'nli kasrni o'nli kasrga bo'lish uchun bo'luvchida qancha kasr xonasi bo'lsa, bo'linuvchi va bo'luvchidagi vergullarni shuncha xona o'ng tomonga suramiz, natijada bo'luvchi butun songa aylanadi.

Buning natijasida bo'linuvchi va bo'luvchi bir xil marta ortgani uchun bo'linma o'zgarmaydi.

14-§. Oddiy kasrni cheksiz davriy kasrga aylantirish

2,73 o'nli kasr berilgan bo'lsin. Agar kasrning o'ng tomonidagi qismiga istalgancha nollar yozib qo'yilsa, uning qiymati o'zgarmaydi. 2,73=2,730=2,7300=...=2,7300...0. Shuningdek, 2,73 kasrni cheksiz ko'p nollari bo'lgan o'nli kasr ko'rinishida yozish mumkin. Masalan, 2,73=2,73000... . Bu yerda verguldan keyin cheksiz ko'p o'nli xonalar mavjud. Bunday o'nli kasr ***cheksiz o'nli kasr*** deyiladi.

Istalgan oddiy kasrni cheksiz o'nli kasr ko'rinishida yozish mumkin. Masalan, 3/14 sonini olib, uning suratini maxrajiga bo'lib ketma-ket o'nli xonalarni hosil qilamiz. Bunda istalgan natural sonni barcha o'nli xonalari nolga teng bo'lgan cheksiz o'nli kasr ko'rinishida yozish mumkinligini qayd qilib o'tamiz.

Masalan, 3 = 3,00000... .

$$
\begin{array}{r|l}
-\,3{,}00000000\ldots & 14 \\
\underline{28} & 0{,}214285714\ldots \\
-\,20 & \\
\underline{14} & \\
-\,60 & \\
\underline{56} & \\
-\,40 & \\
\underline{28} & \\
-\,120 & \\
\underline{112} & \\
-\,80 & \\
\underline{70} & \\
-\,100 & \\
\underline{98} & \\
-\,20 & \\
\underline{14} & \\
60 &
\end{array}
$$

Shunday qilib, 3/14 = 0,214285714 ...

Bo'lish davomida chiqqan barcha qoldiqlarni ketma-ket yozib chiqamiz: 2, 6, 4, 12, 8, 10, 2, 6 ... Bu qoldiqlarning barchasi bo'luvchidan, ya'ni 14 sonidan kichik. Bu bo'lishning qaysidir qismida ilgari uchragan qoldiq yana albatta uchrashi kerakligini bildiradi. Bizda yettinchi qadamda 2 qoldiq hosil bo'lib, u birinchi qadamda paydo bo'lgan edi. Bundan tashqari, ilgari uchragan qoldiq paydo bo'lgan zahotiyoq undan keyingi qoldiqlar ular avval qanday tartibda bo'lsa, shunday tartibda takrorlanadi. Bizning misolimizda 2 qoldiqdan so'ng 6 qoldiq, undan keyin 4, undan keyin 12 keladi va hokazo, ya'ni biz qoldiqlarning quyidagi ketma-ketligini hosil qilamiz: 2, 6, 4, 12, 8, 10, 2, 6, 4, 12, 8, 10, ... Davriy takrorlanuvchi qoldiqlar guruhi mos ravishda sonning o'nli yozuvidagi davriy takrorlanuvchi raqamlar guruhiga olib keladi, ya'ni 3/14=0,2142857142857142857... . Sonning o'nli yozuvida verguldan keyingi ketma-ket takrorlanib keluvchi bunday raqamlar guruhi davr deb ataladi, o'z yozuvida ana shunday davrga ega bo'lgan chekli o'nli kasr ***davriy kasr*** deyiladi. Qisqalik uchun davrni bir marta qavs ichiga olib yozish qabul qilingan:

0,2142857142857142857 14...=0,2(142857). Agar davr verguldan keyin boshlansa, bunday kasr ***sof davriy kasr*** deyiladi, agar vergul va davr orasida boshqa o'nli xonalar bo'lsa, kasr aralash davriy kasr deyiladi. Masalan, 2,(23)=2,2323232323... – sof davriy kasr, 0,2(142857) – aralash davriy kasr, 2,73=2,73000000... = 2,73(0) aralash davriy kasrdir.

15-§. Cheksiz davriy o'nli kasrni oddiy kasrga aylantirish

Cheksiz o'nli kasrni 10, 100, 1000 va hokazo ko'paytirish uchun chekli o'nli kasr holatidagi kabi vergulni bir, ikki, uch va hokazo xona o'ngga surish kifoya. Masalan, 0,1(23)·100= 0,123232323... · 100=12, 32323232...=12,(32). Davriy o'nli kasrni oddiy kasrga aylantirishni quyidagi misollar orqali ko'rib chiqaylik.

1. Sonni oddiy kasrga aylantiring: a) 0,(13); b) 2,(273); d) 0,2(54); e) 3,254(9).

Yechish: a) x=0,13=0,131313... bo'lsin. Sof davriy kasr x ni shunday songa ko'paytiramizki, natijada vergul kasr davri qadar o'ngga suriladi. Davrda ikkita raqam bo'lgani uchun vergulni o'ng tomonga ikki xona surish kerak, buning uchun esa x sonni 100 ga ko'paytirish yetarli, u holda $100\cdot x$=0,131313...·100=13,13131313...= 13,(13);

$100x-x$=13,(13)–0,(13). Demak, $99x$=13, bundan $x=\frac{13}{99}$.

b) x=2,(273) bo'lsin. Bu sof davriy kasrning davrida uchta raqam bor. x ni 1000 ga ko'paytirib, $1000x$=2273,(273) ni hosil qilamiz. Xuddi yuqoridagiga o'xshash topamiz:

$$1000x-x=2273,(273)-2,(273),\ 999x=2271,\ \text{bundan}\ x=\frac{2271}{999}=$$

$$=\frac{757}{333}=2\frac{91}{333}$$

d) x=0,2(54) bo'lsin. Bu aralash davriy kasrda vergulni o'ng tomonga shunday suramizki, natijada sof davriy kasr hosil bo'lsin. Buning uchun x ni 10 ga ko'paytirib qo'yish kifoya. $10x$=2,(54) ni hosil qilamiz.

y=2,(54) bo'lsin va yuqoridagilarga o'xshash bu sof davriy kasrni oddiy kasrga aylantiramiz. y=2,(54) bundan $100y$=254(54), $100y-y$=254(54)–2,54,

$99y=252$, $y=\frac{252}{99}=\frac{28}{11}$ demak, $10x=\frac{28}{11}$, bundan $x=\frac{28}{11\cdot 10}=\frac{11}{55}$.

e) x=3,254(9) deb $1000x$=3254(9)ni hosil qilamiz. $y=1000x$ belgilashni kiritamiz, u holda y=3254,(9), bundan $10y-y$=32549(9)–

$=3254(9)$; $y=3255$, $1000x=3255$, $x=\frac{3255}{1000}=3\frac{51}{200}$.

Endi quyidagiga e'tibor beramiz. $\frac{3255}{1000}=3,255=3,255(0)$ chekli o'nli kasr yoki davrida nol bo'lgan cheksiz kasrni hosil qilamiz.

Demak, 3,254(9)=3,255(0). Bu hol davrida to'qqiz bo'lgan istalgan kasr ko'rinishida yozish mumkin. Buning uchun davr oldidagi o'nli raqamni bir birlikka orttirish kifoya. Masalan, 0,45(9)=0,46(0); 14,(9)= = 15,(0).

16-§. Irratsional son tushunchasini kiritish metodikasi

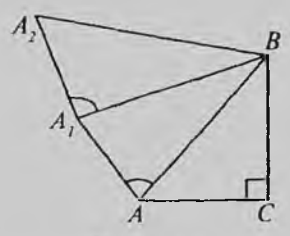
O'quvchilar VII sinfda birinchi marta irratsional son tushunchasi bilan tanishadilar. O'qituvchi bu mavzuni tushuntirishdan oldin o'quvchilarga kvadrat ildiz va arifmetik ildiz tushunchalarini tushuntirishi, so'ngra irratsional son tushunchasini quyidagi masalani yechish orqali kiritishi lozim.

Masala. Katetlari bir birlikka teng bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchakning gipotenuzasi topilsin (20-chizma).

Berilgan: ΔABC, $\angle C=90°$, $CB=AC=1$.

Topish kerak: $AB=?$

Yechish. Pifagor teoremasiga ko'ra: $AB^2=AC^2+CB^2$, $AB^2=1^2+1^2=2$.



20-chizma.

Masalaning yechimini quyidagicha o'qish mumkin. Shunday AB soni topilsinki, uni kvadratga ko'tarilganda 2 soni hosil bo'lsin. Bunday AB son ratsional sonlar to'plamida mavjud emas. A nuqtadan AB ga perpendikular $AA_1=1$ katetni o'tkazib, uning A_1 nuqtasini B nuqta bilan birlashtirib, A_1B ning qiymatini hisoblaymiz: $A_1B^2=AB^2+1^2$; $A_1B^2=2+1=3$; $A_1B^2=3$ soni ham ratsional sonlar maydonida mavjud emas. Yuqoridagilardan ko'rinadiki, ratsional sonlar to'plamida mavjud bo'lmagan yana qandaydir sonlar to'plami ham mavjud ekan, ya'ni $AB^2=2$; $A_1B^2=3$,...

Yuqoridagi mulohazalarga ko'ra $AB^2=2$, $A_1B^2=3$,... ko'rinishdagi sonlarni ratsional bo'lmagan yoki irratsional sonlar deb ataldi va ularni $AB=\sqrt{2}$, $A_1B=\sqrt{3}$, ... kabi belgilash qabul qilingan.

Ta'rif. $\frac{p}{q}$ kasr ko'rinishida tasvirlab bo'lmaydigan sonlar irratsional sonlar deyiladi. $(p, q) \in N$.

Bu yerda o'quvchilarga yana shu narsani tushuntirish kerakki, har qanday ratsional sonni cheksiz davriy o'nli kasr ko'rinishda ifodalash mumkin, irratsional sonni cheksiz davriy o'nli kasr ko'rinishida ifodalab bo'lmaydi, bunga quyidagi misollarni ko'rsatish mumkin.

1. $\sqrt{5} = 2,360679...$ bundagi $\sqrt{5}$ irratsional son cheksiz davriy bo'lmagan o'nli kasr ko'rinishida ifodalanayapti.

2. $\sqrt{2} \approx 1,41$ – bundagi $\sqrt{2}$ irratsional son ta'rifini yana quyidagicha keltirish mumkin.

Ta'rif. *Cheksiz davriy o'nli kasr ko'rinishida ifodalab bo'lmaydigan sonlarni irratsional sonlar deb ataladi.*

Teorema. Kvadrati 2 ga teng bo'lgan ratsional son mavjud emas.

Bu teoremaning isbotini teskarisidan faraz qilish yo'li bilan isbotlaymiz, chunki $1^2<2<2^2$ butun sonlar to'plamida u kvadrati 2 ga teng bo'lgan son mavjud emas.

Isboti. Faraz qilaylik, $\frac{p}{q}$ ko'rinishidagi qisqarmas kasr mavjud bo'lsin, p va q natural sonlar. Faraz qilaylik, kvadratı 2 ga teng bo'lgan ratsional son mavjud bo'lsin, ya'ni: $\left(\frac{p}{q}\right)^2=2$, bunda $p^2=2q^2$, bunda r ning ham juft ekanligi kelib chiqadi. Agar $r = 2n$ bo'lsa, $4n = 2q^2$ $2n = q^2$ bundan q ning ham juft son ekanligi kelib chiqadi. Farazimizga p ni qisqarmas kasr degan edik, isbotning natijasida esa $\frac{p}{q}$ qisqaruvchi kasr bo'lib chiqmoqda, bunday qarama-qarshilik farazimizning noto'g'ri ekanligini tasdiqlab, teorema to'g'ri ekanligini isbotlaydi.

Yuqoridagi ta'rif va isbot qilingan teoremalardan ko'rinadiki, kvadrati 2, 3, 5, ... 11 larga teng bo'ladigan ratsional son mavjud emas ekan, shuning uchun bularni irratsional sonlar deb atadik. Bunday irratsional sonlarni $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, ...$ kabi belgilash qabul qilingan. Ularga qarama-qarshi sonlar ham irratsional sonlar bo'lib, ular $-\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$, $-\sqrt{5}$, –

kabi belgilanadi. O'qituvchi bu yerda o'quvchilarga shuni eslatishi kerakki, irratsional sonlarga kvadrati berilgan musbat songa teng bo'lgan sonni topish masalasigina olib kelmaydi. Masalan, aylana uzunligining diametriga nisbatini ifodalovchi π sonini oddiy kasr ko'rinishida tasvirlash mumkin emas, u ham irratsional sondir.

17-§. Haqiqiy sonlar

Ratsional va irratsional sonlar birgalikda haqiqiy sonlar to'plamini hosil qiladi. Har bir haqiqiy songa koordinata to'g'ri chiziqning yagona nuqtasi mos keladi. Haqiqiy sonlar to'plami son to'g'ri chizig'i deb ham ataladi. Son to'g'ri chizig'ining geometrik modeli koordinata to'g'ri chizig'idan iboratdir.

O'qituvchi haqiqiy sonlarning geometrik tasvirini ko'rsatganidan keyin savol-javob metodi orqali haqiqiy sonlarni taqqoslashni va ularning natijasi sifatida hosil qilinadigan sonli tengsizlik hamda ularning xossalarini bayon qilishi maqsadga muvofiqdir.

Haqiqiy sonlarni taqqoslash masalasi quyidagi ikkita ta'rif asosida hal qilinadi.

Ta'rif. *a sonidan b sonini ayirganda ayirma musbat bo'lsa, u holda a soni b sonidan katta deyiladi va u quyidagicha yoziladi.* $a-b>0$ *bundan* $a>b$ *ekanini ko'rinadi.*

Ta'rif. *a sonidan b sonini ayirganda ayirma manfiy bo'lsa, u holda a soni b sonidan kichik deyiladi va u bunday yoziladi:* $a-b<0$, *bundan* $a<b$ *ekani ko'rinadi.*

Bu yerdagi $a>b$ va $a<b$ ifodalar sonli tengsizliklar deyiladi.

Sonli tengsizliklar xossalari:

1) agar $a > b$ bo'lsa, $b<a$ bo'ladi;

2) agar $a > b$ va $b<c$ bo'lsa, u holda $a<c$ bo'ladi;

3) agar $a>b$ bo'lsa, $a+c > b+c$ bo'ladi;

4) agar $a>b$ va c musbat son bo'lsa, u holda $ac>bc$;

I s b o t i: $ac-bc$ ayirmani hosil qilamiz. $ac-bc=c(a-b)$ shartga ko'ra c musbat son va $a>b$ bo'lgani uchun $a-b$ musbat son. Ikkita musbat sonning ko'paytmasi musbat sondir, demak $c(a-b)>0$. Shunday qilib, $ac-bc>0$, bundan: $ac>bc$;

5) agar $a>b$ va c manfiy son bo'lsa, u holda $ac<bc$ bo'ladi. Agar tengsizlikning har ikkila tomoni bir xil manfiy songa ko'paytirilsa, tengsizlikning ishorasi qarama-qarshiga o'zgaradi;

6) agar $a>b$ va $c>d$ bo'lsa, u holda $a+c>b+d$ bo'ladi;

7) agar $a>b>0$ bo‘lsa, u holda $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ bo‘ladi;

8) agar $a>b>0$ bo‘lsa, istalgan n natural son uchun $a^n>b^n$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Sonli oraliqlar va ularning tasviri

Oraliqlar turi	Belgilanish	Tengsizliklar yordamida yozilishi
Interval	(a; b)	a < x < b
Kesma	[a; b]	a≤x≤ b
Yarim interval	(a; b]	a < x≤b
Yarim interval	[a; b)	a≤x <b
Nur	[a;+ ∞)	x≥a
Nur	(- ∞ ;b]	x≤ b
Ochiq nur	(a;+ ∞)	x > a
Ochiq nur	(- ∞ ;b)	x < b

Haqiqiy sonning moduli va uning xossalari. Haqiqiy son a ning moduli deb, agar $a>0$ bo‘lsa, bu sonning o‘ziga, agar $a<0$ bo‘lsa, uning qarama-qarshi songa aytiladi. a sonning moduli $|a|$ kabi belgilanadi. Shunday qilib,

$$|a|=\begin{cases} agar \ \ a>0 \quad bo‘lsa, \quad a, \\ agar \ \ a<0 \quad bo‘lsa, \quad -a \end{cases}$$

masalan, $|x-3|=x-3$, chunki agar $\begin{cases} x-3>0, & x>3, \\ x-3<0, & x<3. \end{cases}$

Geometrik nuqtayi nazardan $|a|$ ifoda koordinata to‘g‘ri chizig‘ida a nuqtadan 0 nuqtagacha bo‘lgan masofani bildiradi.

Modullarning xossalari:

1. $|a|\geq 0$. 2. $|a|=|-a|$. 3. $|a\,b|=|a|\ |b|$.

4. $\left|\frac{a}{b}\right|=\left|\frac{a}{b}\right|; b\neq 0$. 5. $|a|^2=a^2$.

18-§. Haqiqiy sonlar ustida amallar bajarish qoidalari

Bir xil ishorali ikkita sonning yig'indisi o'sha ishorali yig'indi songa tengdir. Bunday yig'indining modulini topish uchun qo'shiluvchilar yig'indisini topish kerak.

Masalan, $(+12)+(+8)=+20$, $(-12)+(-8)=-20$.

Turli ishorali ikkita sonning yig'indisi katta bo'lgan qo'shiluvchining ishorasi bilan bir xil ishorali sondir, bu yig'indining qiymatini topish uchun katta sondan kichik sonni ayirish va ayirma oldiga katta son ishorasini qo'yish kerak.

Masalan:

$$(12)+(-8)=+(12-8)=4, \qquad (-12)+(+8)=-(12-8)=-4.$$

Bir sondan ikkinchisini ayirish uchun kamayuvchiga ayiriluvchiga qarama-qarshi bo'lgan sonni qo'shish kerak.

Masalan, $12-(-8)=12+8=20$, $12-(+8)=12-8=4$.

Bir xil ishorali ikki sonning ko'paytmasi (bo'linmasi) musbat, har xil ishorali ikki sonning ko'paytmasi manfiy, bo'linmasi ham manfiy bo'lgan sondir. Ko'paytma (bo'linma)ning topish uchun berilgan sonlarning o'zaro ko'paytirish (bo'lish) kerak.

Masalan, $(-12)\cdot(-8)=+12\cdot 8=96$, $(-24):(+3)=-24:3=-8$.

Arifmetik amallarning xossalari.

1) $a+b=b+a$;
2) $(a+b)+c=a+(b+c)$;
3) $a+0=a$;
4) $a+(-a)=0$;
5) $ab=ba$;
6) $(ab)c=a(bc)$;
7) $a(b+c)=ab+ac$;
8) $a\cdot 1=a$;
9) $a\cdot\frac{1}{a}=1, \quad a\neq 0.$

19-§. Arifmetik kvadrat ildiz tushunchasini kiritish

VII sinf algebra kursida «arifmetik kvadrat ildiz« tushunchasi kiritiladi. Agar $x^2=16$ tenglama berilgan bo'lsa, bu tenglamani o'quvchilar ko'paytuvchilarga ajratish orqali yechishni biladilar, ya'ni

$$(x^2=16)\Rightarrow[(x^2-16)=0]\Rightarrow[(x^2-4^2)=0]\Rightarrow$$
$$\Rightarrow[(x-4)(x+4)]=0\Rightarrow(x_1=4)\wedge(x_2=-4).$$

Demak, $x^2=16$ tenglamaning yechimlari $x_1=4$ va $x_2=-4$ sonlaridan iborat ekan. Yuqoridagi mulohazalarga ko'ra quyidagi qoidani chiqarish mumkin: $x^2=16$ tenglamaning ildizlari, ya'ni kvadrati 16 ga teng bo'lgan sonlar 16 sonining ***kvadrat ildizlari*** deyiladi. $(-4)^2=16$ bundan $4^2=16$ bo'lgani uchun -4 va 4 sonlari $x_2=16$ tenglamaning kvadrat ildizlaridir.

Ta'rif. *a sonining kvadrat ildizi deb kvadrati a songa teng bo'lgan songa aytiladi.*

Kvadrat ildiz tushunchasidan tashqari arifmetik kvadrat ildiz tushunchasi ham bo'lib, uni quyidagicha tushuntirish mumkin: $x_1=4$ va $x_1=4$ lar $x^2=16$ tenglamada ikkita ildiz bo'lib, ulardan$x_1=4$ yechimi musbatdir. Bunday musbat yoki nomanfiy yechim ana shu tenglamaning ***arifmetik kvadrat ildizi*** deyiladi. Bu tushuncha umumiy holda esa quyidagicha ta'riflanadi.

Ta'rif. *a sonining arifmetik kvadrat ildizi deb kvadrati a ga teng bo'lgan nomanfiy songa aytiladi va u* $\sqrt{a}$ *kabi belgilanadi.*

20-§. Arifmetik to'rt amalga doir misollar yechish metodikasi

1-misol.
$$\frac{172\frac{5}{6}-170\frac{1}{3}+3\frac{5}{12}}{0,8\ \ 0,25}=29\frac{7}{12}.$$

1) $$172\frac{5}{6}=170\frac{1}{3}+3\frac{5}{12}=(172-170+3)+\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{3}+\frac{5}{12}\right)=$$

$$=5+\frac{10-4+5}{12}=5+\frac{11}{12}=5\frac{11}{12};$$

2) $$0,8\ \ 0,25=\frac{8}{10}\ \ \frac{25}{100}=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{5};$$

3) $$5\frac{11}{12}:\frac{1}{5}=\frac{71}{12}\ \ 5=\frac{355}{12}=29\frac{7}{12}.$$

2-misol.
$$\frac{\left[\left(40\frac{7}{30}-38\frac{5}{12}\right):10,9+\left(\frac{7}{8}-\frac{7}{30}\right)1\frac{9}{11}\right]\cdot 4,2}{0,008}=700.$$

Yechish:

1) $$40\frac{7}{30}-38\frac{5}{12}=(40-38)+\left(\frac{70}{30}-\frac{5}{12}\right)=2+\frac{14-25}{60}=1+\frac{74-25}{60}=1\frac{49}{60};$$

2) $1\frac{49}{60}:10,9=\frac{109}{60}:\frac{109}{10}=\frac{109}{60}\cdot\frac{10}{109}=\frac{1}{6};$ 5) $\frac{1}{6}+\frac{7}{6}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3};$

3) $\frac{7}{8}-\frac{7}{30}=\frac{105-28}{120}=\frac{77}{120};$ 6) $\frac{4}{3}\cdot 4,2=\frac{4}{3}\cdot\frac{21}{5}=\frac{28}{5};$

4) $\frac{77}{120}\cdot 1\frac{9}{11}=\frac{77}{120}\cdot\frac{20}{11}=\frac{7}{6};$ 7) $\frac{28}{5}:0,008=\frac{28}{5}\cdot 125=28\cdot 25=700.$

3-misol. $1\frac{7}{20}:2,7+2,7:1,35+\left(0,4:2\frac{1}{2}\right)\cdot\left(4,2-1\frac{3}{40}\right)=3.$

Yechish:

1) $1\frac{7}{20}:2,7=\frac{27}{20}:2\frac{7}{10}=\frac{27}{20}:\frac{27}{10}=\frac{27}{20}\cdot\frac{10}{27}=\frac{1}{2};$

2) $2,7:1,35=2\frac{7}{10}:1\frac{35}{100}=\frac{27}{10}:1\frac{7}{20}=\frac{27}{10}:\frac{27}{20}=\frac{27}{10}\cdot\frac{20}{27}=2;$

3) $\frac{1}{2}+2=2\frac{1}{2};$

4) $0,4:2\frac{1}{2}=\frac{2}{5}:\frac{5}{2}=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{25};$

5) $4,2-1\frac{3}{40}=4\frac{1}{5}-1\frac{3}{40}=(4-1)+\left(\frac{1}{5}-\frac{3}{40}\right)=3+\frac{8-3}{40}=$

$=3+\frac{5}{40}=3+\frac{1}{8}=3\frac{1}{8};$ 6) $\frac{4}{25}\cdot 3\frac{1}{8}=\frac{4}{25}\cdot\frac{25}{8}=\frac{1}{2};$ 7) $2\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=3.$

Takrorlash uchun savollar

1. Natural sonlar to'plamini tushuntirib bering.
2. Butun sonlar to'plamiga misollar keltiring.
3. Ratsional sonlar to'plamini ta'riflang.
4. Haqiqiy sonlar to'plamini tushuntirib bering.
5. Sonning moduli deganda nimani tushunasiz?
6. Qo'shish amalini tushuntirib bering.
7. Ayirish amalini ta'riflang.
8. Ko'paytirish amalini ta'riflang.
9. Bo'lish amalini ta'riflang.

10. Kasr son deganda qanday sonni tushunasiz?
11. Kasr sonlar ustida to‘rt amal bajarish metodikasini aytib bering.
12. Kasrlarni taqqoslash qanday amalga oshiriladi?
13. Qanday kasr o‘nli kasr deyiladi?
14. O‘nli kasrlarni qo‘shish va ayirish qanday bajariladi?
15. O‘nli kasrlarni ko‘paytirish va bo‘lish qanday bajariladi?
16. Oddiy kasr qanday qilib cheksiz davriy o‘nli kasrga aylantiriladi?
17. Cheksiz davriy o‘nli kasr qanday qilib oddiy kasrga aylantiriladi?
18. Irratsional son tushunchasini tushuntirib bering.
19. Sonli tengsizlik xossalarini aytib bering.
20. Sonli oraliqlar deganda nimani tushunasiz?
21. Arifmetik kvadrat ildiz tushunchasini tushuntirib bering.
22. Kvadrat ildiz tushunchasi deganda qanday son tushuniladi?

Tayanch iboralar

Natural son, butun son, ratsional son, irratsional son, haqiqiy son, sonning moduli, to‘rt amal tushunchasi, kasr son, kasrlarni taqqoslash, kasrlarni qo‘shish, kasrlarni ayırish, kasrlarni ko‘paytirish, kasrlarni bo‘lish, o‘nli kasr, cheksiz davriy o‘nli kasr, kvadrat ildiz, arifmetik kvadrat ildiz, sonli oraliqlar, sonli tengsizlik.

MUSTAQIL YECHISH UCHUN MISOLLAR

1. $$\frac{1{,}4:\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)}{\left(3\frac{1}{6}\cdot 6-5\frac{1}{2}\cdot 2\frac{5}{11}\right):3\frac{2}{3}}.$$ *Javobi:* 1,6.

2. $$\frac{\left(2-1\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{7}\right)\left(1\frac{1}{3}-2\frac{1}{2}:3\frac{3}{4}\right)}{2\frac{1}{3}:\left(\frac{1}{4}-\frac{5}{8}+\frac{7}{8}\right)}.$$ *Javobi:* $\frac{3}{14}$.

3. $$\frac{11\frac{2}{3}\cdot 2\frac{4}{7}}{12\frac{4}{5}\cdot 3\frac{3}{4}-4\frac{4}{11}\cdot 4\frac{1}{8}}.$$ *Javobi:* 1.

4. $\dfrac{28\frac{4}{5}:14\frac{2}{5}+6\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}}{1\frac{11}{16}:2\frac{1}{4}}$. *Javobi:* $9\frac{1}{3}$.

5. $\dfrac{1\frac{9}{16}\cdot3\frac{1}{5}-9:2\frac{2}{5}}{1\frac{1}{3}\cdot\left(17\frac{7}{12}-6\frac{1}{3}\right):\frac{3}{4}}$. *Javobi:* $\frac{1}{16}$.

6. $\left(\frac{0,012}{5}+\frac{0,04104}{5,4}\right)\cdot4560-42\frac{1}{3}$. *Javobi:* $5\frac{3}{14}$.

7. $\dfrac{\left(85\frac{7}{30}-83\frac{5}{18}\right):2\frac{2}{3}}{0,04}$. *Javobi:* $18\frac{1}{3}$.

8. $\dfrac{\left(140\frac{7}{30}-138\frac{5}{12}\right):18\frac{1}{6}}{0,002}$. *Javobi:* 50.

9. $\dfrac{\left(95\frac{7}{30}-93\frac{5}{18}\right)\cdot2\frac{1}{4}+0,373}{0,2}$. *Javobi:* 23,865.

10. $\dfrac{\left(12\frac{1}{6}-6\frac{1}{27}-5\frac{1}{4}\right)\cdot13,5+0,111}{0,02}$. *Javobi:* 599,3.

11. $\dfrac{\left(68\frac{7}{30}-66\frac{5}{18}\right):6\frac{1}{9}+\left(\frac{7}{40}+\frac{3}{32}\right)\cdot4,5}{0,04}$. *Javobi:* $38\frac{15}{64}$.

12. $\dfrac{(2,1-1,965):(1,2\cdot0,045)}{0,00325:0,013}-\dfrac{1:0,25}{1,6\cdot0,625}$. *Javobi:* 6.

13. $\left(17\frac{1}{2}-8,25\cdot\frac{10}{11}\right)\cdot\left(11\frac{2}{3}:\frac{2}{9}+3,5\right)$. *Javobi:* 560.

14. $\left(\frac{1}{2}-0,375\right):\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\cdot(0,358-0,108).$ *Javobi:* $\frac{15}{16}$.

15. $(10,5\cdot 2,04-0,1)\cdot(6,25\cdot 0,2+0,8:0,64).$ *Javobi:* 53,3.

16. $\dfrac{2\frac{5}{7}-\frac{2}{3}\cdot 2\frac{5}{14}}{\left(3\frac{1}{12}+4,375\right):9\frac{8}{9}}.$ *Javobi:* $2\frac{17}{21}$.

17. $\dfrac{0,134+0,05}{18\frac{1}{6}-1\frac{11}{14}-\frac{2}{15}\cdot 2\frac{6}{7}}.$ *Javobi:* 0,0115.

18. $\dfrac{\left(58\frac{4}{15}-56\frac{7}{24}\right):0,8+2\frac{1}{9}\cdot 0,225}{8\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{5}}.$ *Javobi:* $\frac{157}{280}$.

19. $\left[\dfrac{\left(6-4\frac{1}{2}\right):0,03}{\left(3\frac{1}{20}-2,65\right)\cdot 4+\frac{2}{5}}-\dfrac{\left(0,3-\frac{3}{20}\right)\cdot 1\frac{1}{2}}{\left(1,88+2\frac{1}{25}\right)\cdot\frac{1}{80}}\right]:2\frac{1}{20}.$ *Javobi:* 10.

20. $\left(\frac{0,216}{0,15}+\frac{2}{3}:\frac{4}{15}\right)+\left(\frac{196}{225}-\frac{7,7}{24\frac{3}{4}}\right)+0,695:1,39.$ *Javobi:* 5.

21. $\frac{1}{3}:\frac{2}{3}+0,228:\left[\left(1,5291-\frac{1,453662}{3-0,095}\cdot 0,305\right):0,12\right]$ *Javobi:* 10.

22. $\dfrac{\left[\left(6,2:0,31-\frac{5}{6}\cdot 0,9\right)\cdot 0,2+0,15\right]:0,02}{\left(2+1\frac{4}{11}\cdot 0,22:0,1\right)\cdot\frac{1}{33}}.$ *Javobi:* 1320.

VII bob.
MAKTABDA AYNIY SHAKL ALMASHTIRISHLARNI O'RGATISH METODIKASI

1-§. Ayniy shakl almashtirishlar

Algebraik ifodalarning ayniy almashtirishlari maktab matematika kursida muhim o'rin egallaydi va VI—XI sinflarning dastur materiallarini o'rganish jarayonida qo'llaniladi. Maktab matematika kursida sonlar va harflar bilan belgilangan algebraik ifodalarni qo'shish, ayirish, ko'paytirish va bo'lish, darajaga ko'tarish, ildiz chiqarish va logarifmlash kabi amallar bajariladi. Bu amallarni bajarish jarayonida ana shu algebraik ifodalarning miqdoriy qiymatlarini saqlab, ularni turli ko'rinishlarda yozishga to'g'ri keladi.

Ta'rif. *Algebraik ifodaning miqdoriy qiymatini o'zgarmasdan bir shakldan ikkinchi bir shaklga o'zgartirib yozish ayniy almashtirish deyiladi.*

Maktab matematika kursida ayniyat degan tushuncha o'rganiladi, so'ngra ayniy almashtirish degan tushuncha kiritiladi.

Ta'rif. *Tarkibidagi harflarning har qanday qiymatlarida ham to'g'ri bo'laveradigan ikki algebraik ifodaning tengligi ayniyat deyiladi.*

Masalan, $\frac{x^3-1}{x-1}=x^2+x+1$ tenglik ayniyatdir, chunki tenglikda qatnashayotgan noma'lum x ning ixtiyoriy qiymatlarida tenglikning chap tomoni uning o'ng tomoniga har doim teng chiqadi. 6-sinfda o'rganiladigan qisqa ko'paytirish formulalari ham ayniy tengliklardir:

1) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$; 2) $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$;

3) $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$; 4) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

Yuqoridagi ta'rif va misollardan ko'rinadiki, ayniyat arifmetik amallar qonunlarining harfiy ifodalangan shakli ekan. Ayniy shakl almashtirishlarda algebraik ifodalarni taqqoslash, ular ustida amallar bajarish uchun ifodalardagi birhad va ko'phadlarning shaklini o'zgartirish kabi ishlarni bajarish ko'zda tutiladi. Maktab matematika kursidagi ayniy shakl almashtirishlarni shartli ravishda quyidagicha ketma-ketlik asosida ifodalash mumkin:

1. Butun ifodalarni ayniy almashtirish.
2. Kasr ifodalarni ayniy almashtirish.
3. Irratsional ifodalarni ayniy almashtirish.
4. Trigonometrik ifodalarni ayniy almashtirish.

Har qaysi almashtirishni ko'rib chiqamiz.

1. Butun ifodalarni ayniy almashtirish. Ayniyat va ayniy almashtirish tushunchalari VI sinfdan boshlab kiritiladi, lekin I sinf matematika darslaridayoq ayniy almashtirishlar bajariladi. Masalan, $3+2=5$ ifodaning yig'indisini hisoblash $3+(1+1)=(3+1)+1=4+1=5$ kabi ayniy almashtirish yordamida bajariladi. IV–V sinflarda sonlar ustida murakkabroq ayniy almashtirishlar bajariladi. Masalan; $52=5\cdot10+2=5\cdot5\cdot2+2=25\cdot2+2$; $35=3\cdot10+5=3\cdot5\cdot2+5=6\cdot5+5$. Bu misollarda bajarilgan ishlar o'quvchilariga ayniy almashtirish deb o'rgatilmasada lekin aslida sonlar ustida ayniy almashtirish bajariladi.

Ma'lumki, ratsional algebraik ifodalar arifmetik to'rt amal hamda darajaga ko'tarish amallari asosida tuziladi. Agar algebraik ifoda qo'shish, ayirish, ko'paytirish va darajaga ko'tarish amallari asosida tuzilgan bo'lsa, u holda bunday ifodalar butun ifodalar deyiladi.

Masalan,

1) $5y^2(2x^2-3y)$; 2) $(x+y)(y-x)$;

3) $(2x+5)(7-3x)$; 4) $(c+5)(c^2-3c+5)$.

Butun ifodalarni ayniy almashtirishdagi asosiy vazifa berilgan matematik ifodani ko'phadlarni imkoniyati boricha algebraik amallar yordamida standart shaklidagi birhadlar ko'rinishiga keltirib soddalashtirishdan iboratdir. Shu yerda o'qituvchi o'quvchilarga o'xshash hadlar, birhad va ko'phad tushunchalarini tushuntirish hamda ularga misollar ko'rsatishi lozim.

Har qanday algebraik ifoda birhad va ko'phadlardan iborat bo'ladi.

Ta'rif. *Ko'paytirish va darajaga ko'tarish amallari yordamida tuzilgan ifodalarni birhad deyiladi.*

Masalan: $5y^2x$, $\frac{4}{5}xya^2$;...

Birhadlarni ham standart shakllarga keltirish misollar yordamida tushuntiriladi. Masalan; $6x\cdot4y$ birhad sodda holga keltirilsin. Bu misolga ko'paytirish, o'rin almashtirish va guruhlash qonunlarini qo'llasak, $6x\cdot4y=24xy$ bo'ladi.

Ta'rif. *Bir necha birhadlarning yig'indisidan iborat bo'lgan ifoda ko'phad deyiladi.*

Masalan: 1) $5x^2y+\frac{3}{5}y^2x$; 2) $13a^2b+\frac{4}{7}c^2a+\frac{3}{5}a^2b$.

Yuqorida ta'rif va misollardan ko'rinadiki, birhad ko'phadning xususiy holi ekan.

Ta'rif. *Ko'phadning o'zaro koeffitsiyentlari bilangina farq qiladigan yoki butun koeffitsiyentli bo'lgan hadlari o'xshash hadlar deyiladi. O'xshash hadlarni arifmetik amallar yordamida birhad ko'rinishida ifodalashni ixchamlash deyiladi.*

Masalan:

1) $20y^2x+4zt-12y^2x-3zt=(20y^2x-12y^2x)+(4zt-3zt)=$

$=8y^2x+zt$;

2) $2,4a^2b^2+3,2cd-1,4a^2b^2-2,5cd=(2,4a^2b^2-1,4a^2b^2)+$

$+(3,2cd-2,5cd)=a^2b^2+0,7cd$.

Butun ifodalarni ayniy almashtirishda belgilangan ko'phadlar birhadlarga, birhadlar esa standart shaklga keltiriladi. Bu ishlarni bajarishda o'qituvchi o'quvchilarni bir xil hadlardan iborat ko'phadlarni standart shaklga keltirishdan boshlashi kerak.

3) Ifodalarni soddalashtiring:

1) $x+x+x=x\cdot 3=3x$;

2) $x+x+x+x+x=(x+x)+(x+x+x)=2x+3x=5x$;

3) $(1,2x^2)\cdot(-5x)+(-7x)-(-2x)(3x^2)=-6x^3-7x+6x^3=-7x$;

4) $(5x^2y-14x^3-8xy^2)+(3x^3-7x^2y+9xy^2)=5x^2y-14x^3-8xy^2+3x^3-$

$-7xy^2+9xy^2=-2x^2y-11x^3+xy^2$.

Shundan keyin qisqa ko'paytirish formulalari yordamida soddalashtiriladigan misollarni ko'rsatish lozim.

1) $(2x+3y)^2+(4y-5x)^2=4x^2+12xy+9y^2+16y^2-40xy+25x^2=29x^2-$

$28xy+25y^2$.

$(xy+4y)^3-(2xy-3y)^3=(xy)^3+3(xy)^2\cdot 4y+3xy(4y)^2+(4y)^3-$

$-[(2xy)^3-3(2xy)^2 3y+3\cdot 2xy(3y)^2-(3y)^3]=$

$=x^3y^3+12x^2y^3+48xy^3+64y^3-8x^3y^3+36x^2y^3-54xy^3+27y^3=$

$=-7x^3y^3+48x^2y^3-6xy^3-6xy^3+91y^3$.

4) Ifoda soddalashtirilsin: $(a-b+c+d)^2+(a+b-c+d)^2$.

1-usul: $(a-b+c+d)^2+(a+b-c+d)^2=[(a+d)-(b-c)]^2+[(a+d)+$
$+(b-c)]^2=(a+d)^2-2(a+d)(b-c)+(b-c)^2+(a+d)^2+2(a+d)(b-c)+$
$+(b-c)^2=2[(a+d)^2+(b-c)^2]$.

2-usul: $(a-b+c+d)^2=A$ deb $(a+b-c+d)^2=B$ deb belgilasak, A^2+B^2 hosil bo'ladi. A^2+B^2ni ayniy almashtirish orqali quyidagicha yozish mumkin: $A^2+B^2=(A+B)^2-2AB$, bularga asosan

$(a-b+c+d)^2+(a+b-c+d)^2=(a-b+c+d+a+b-c+d)^2-2(a-$
$-b+c+d)\cdot(a+b-c+d)=(2a+2d)^2-2(a-b+c+d)\ (a+b-c+d)=$
$=4(a+d)^2-2[(a+d)^2-(b-c)^2]=2[(a+d)^2+(b-c)^2]$.

2-§. Kasr ifodalarni ayniy almashtirish

VII sinf algebra kursidan boshlab kasr ratsional ifodalarni ayniy almashtirish bajariladi.

Ta'rif. *Agar algebraik ifoda qo'shish, ayrish, ko'paytirish va bo'lish amallari yordamida sonlar va o'zgaruvchilardan tuzilgan bo'lsa, u holda bunday ifodani kasr ratsional ifoda deyiladi.*

Masalan: $\frac{y^2-1}{y}$; $\frac{x^2-3x-4}{x+4}$; $\frac{x+5}{x(x-2)}$;....

Kasr ratsional ifodalarni ayniy almashtirish jarayonida ana shu ifoda qatnashayotgan noma'lum sonlarning qabul qiladigan qiymatlarini aniqlash lozim.

Ta'rif. *Kasr ratsional ifodadagi o'zgaruvchilarning ma'noga ega bo'ladigan qiymatlari o'zgaruvchilarning qabul qiladigan qiymatlari deyiladi.*

Masalan, $\frac{2x-y}{4xy}+\frac{11y-2x}{4xy}$ kasr ratsional ifodadagi x va y larning qabul qiladigan qiymatlari $x=0$, va $y=0$ dan boshqa barcha son qiymatlardan iboratdir. Agar x va y o'zgaruvchilardan biri nol qiymatini qabul qilsa, kasrning maxraji nol bo'lib, o'zining ma'nosini yo'qotadi, chunki har qanday sonni nolga bo'lish mumkin emas.

Kasr ratsional ifodalarni ayniy almashtirishdagi asosiy vazifa berilgan ifodaning surat va maxrajlarida turgan ko'phadlarni ayniy almashtirishlar bilan bir hadlar ko'rinishiga keltirishdan iboratdir.

Kasr ratsional ifodalarni ayniy almashtirishdan oldin o‘qituvchi kasr va ular ustida bajariladigan to‘rt amalga doir sonli misollardan namunalar ko‘rsatib, so‘ngra esa harfiy ifodalar qatnashgan kasrlar ustida bajariladigan ayniy almashtirishlarni ko‘rsatishi maqsadga muvofiqdir.

1. a) $\frac{2}{3}+\frac{1}{5}=\frac{2\cdot5}{3\cdot5}+\frac{1\cdot3}{5\cdot3}=\frac{10+3}{15}=\frac{13}{15}$;

b) $\frac{x}{a}+\frac{y}{c}=\frac{x\cdot y}{a\cdot c}+\frac{y\cdot a}{c\cdot a}=\frac{xc+ya}{ca}$;

2. a) $\frac{4}{7}-\frac{1}{9}=\frac{4\cdot9}{7\cdot9}-\frac{1\cdot7}{9\cdot7}=\frac{36}{63}-\frac{7}{63}=\frac{36-7}{63}=\frac{29}{63}$;

b) $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}+\frac{c\cdot d}{d\cdot b}=\frac{ad-cb}{ad}$;

3. a) $\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}=\frac{5\cdot3}{6\cdot4}=\frac{5}{8}$; b) $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$;

4. a) $\frac{7}{9}:\frac{28}{36}=\frac{7}{9}\cdot\frac{36}{28}=\frac{4}{4}=1$; b) $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$.

Yuqorida o‘xshash misollarni ko‘rsatgandan so‘ng o‘qituvchi yana bir ayniy almashtirishning mazmunini quyidagicha tushuntirishi lozim. Har qanday ayniy almashtirishning maqsadi misol yoki masalani yechish uchun berilgan matematik ifodani eng sodda yoki qulay holatga keltirib hisoblashdan iboratdir.

1-misol. $\frac{a^2-25}{a+3}\cdot\frac{a}{a^2+5a}-\frac{a+5}{a^2+3a}$ ifodani soddalashtiring.

Yechish:

1) $\frac{a^2-25}{a+3}\cdot\frac{a}{a^2+5a}=\frac{a^2-5^2}{a+3}\cdot\frac{a}{a(a+5)}=\frac{(a-5)(a+5)}{(a+3)}\cdot\frac{a}{a(a+5)}=\frac{a-5}{a+3}$;

2) $\frac{a-5}{a+3}-\frac{a+5}{a^2+3a}=\frac{a-5}{a+3}-\frac{a+5}{a(a+3)}=\frac{(a-5)a}{(a+3)a}-\frac{a+5}{a(a+3)}=$

$=\frac{a^2-5a-a-5}{a(a+3)}=\frac{a^2-6a-5}{a(a+3)}$.

2-misol. $\left(\frac{5x = y}{x^2-5xy} - \frac{5x-y}{x^2+5xy}\right)\cdot\frac{x^2-25y^2}{x^2+y^2}$ ifodani soddalashtiring.

Yechish:

1) $\frac{5x-y}{x^2-5xy} + \frac{5x-y}{x^2+5xy} = \frac{5x+y}{x(x-5y)} + \frac{5x-y}{x(x+5y)} =$

$$= \frac{(5x+y)(x+5y)}{x(x-5y)(x+5y)} + \frac{(5x-y)(x-5y)}{x(x+5y)(x-5y)} =$$

$$= \frac{5x^2+xy+25xy+5y^2+5x^2-xy-25xy+5y^2}{x(x+5)(x-5y)} =$$

$$= \frac{10x^2+10y^2}{x(x+5y)(x-5y)};$$

2) $\frac{10x^2-10y^2}{x(x+5y)(x-5y)}\cdot\frac{x^2-25y^2}{x^2+y^2} =$

$$= \frac{10(x^2+y^2)}{x(x+5y)(x-5y)}\cdot\frac{(x-5)(x+5y)}{x^2+y^2} = \frac{10}{x}.$$

MUSTAQIL YECHISH UCHUN MISOLLAR

1. [illegible] $(2x - \frac{4x^2}{2x-1})$. *Javobi:* $-2x$.

2. [illegible] $+\frac{1}{a^2-1} - \frac{1}{a-1})$. *Javobi:* $\frac{1+a}{1-a}$.

3. [illegible] $-\frac{1}{2})+1$. *Javobi:* $1{,}5x$.

4. [illegible] $(a - \frac{3a+2}{4})$. *Javobi:* $\frac{a}{a+2}$.

5. [illegible] $\frac{?}{y-2})+3$. *Javobi:* $y=7$

6. $\left(a+b-\frac{2ab}{a+b}\right):\left(\frac{a-b}{a+b}+\frac{b}{a}\right).$ *Javobi:* $a.$

7. $\left(m+1-\frac{1}{1-m}\right):\left(m-\frac{m^2}{m-1}\right).$ *Javobi:* $-m.$

8. $\left[\frac{x-2y}{x+2y}-\frac{1}{x^2-4y^2}:\frac{x+2y}{(2y-x)^3}\right]\cdot\frac{(x+2y)^2}{4y^2}.$ *Javobi:* $\frac{x^2-2xy}{2y^2}.$

9. $\left(\frac{2a}{2a+b}-\frac{4a^2}{4a^2+4ab+b^2}\right):\left(\frac{2a}{4a^2-b^2}+\frac{1}{b-2a}\right).$ *Javobi:* $\frac{2ab-4a^2}{2a+b}.$

10. $\left[\frac{a-1}{3a+(a-1)^2}-\frac{1-3a+a^2}{a^3-1}-\frac{1}{a-1}\right]:\frac{a^2-1}{1-a}.$

Javobi: $\frac{a^2+1}{(a^2+a+1)(a^2-1)}.$

11. $\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}+\frac{3}{x^2-x+1}\right)\cdot\left(x-\frac{2x-1}{x+1}\right).$ *Javobi:* 1.

12. $\left(a+2b+\frac{4b^2}{a-2b}\right):\left(a-\frac{2ab}{a+2b}\right)+1.$ *Javobi:* $\frac{2a}{a-2b}.$

13. $a^2-b^2-c^2+2bc:\frac{a+b-c}{a+b+c}.$ *Javobi:* $a^2-(b+c)^2.$

14. $\left(\frac{5x^2-15xy}{x^2+9y^2}-\frac{3xy+9y^2}{x^2+6xy+9y^2}\right):\left(\frac{5}{y}-\frac{3}{x}\right).$ *Javobi:* $\frac{xy}{x+3y}.$

15. $\left(\frac{4a^2-6ac}{4a^2-6ac+9c^2}-\frac{6ac+9c^2}{4a^2+6ac+9c^2}\right)\cdot\frac{6a+9c}{4a^2+9c^2}.$ *Javobi:* $\frac{3}{2a-3c}.$

16. $\left(x-\frac{4xy}{x+y}+y\right)\cdot\left(x+\frac{4xy}{x-y}-y\right).$ *Javobi:* $x^2-y^2.$

17. $\left(a-\frac{1-2a^2}{1-a}+1\right):\left(1-\frac{1}{1-a}\right).$ *Javobi:* $-a.$

18. $ab+\frac{ab}{a+b}\cdot\left[\frac{a+b}{a-b}-a-b\right].$ *Javobi:* $\frac{ab}{a-b}.$

19. $\left(\frac{y^2-xy}{x^2+xy}-xy+y^2\right)\cdot\frac{x}{x-y}+\frac{x}{x+y}.$ *Javobi:* $-xy-1.$

20. $\left[\frac{1}{(2a-b)^2}+\frac{2}{4a^2-b^2}+\frac{1}{(2a+b)^2}\right]\cdot\frac{4a^2+4ab+b^2}{16a}.$

Javobi: $\frac{a}{(2a-b)^2}.$

21. $\frac{4}{(c-2)^2}:\left(\frac{1}{(c+2)^2}+\frac{1}{(c-2)^2}+\frac{1}{c^2-4}\right).$ *Javobi:* $\frac{4(c+2)^2}{3c^2+4}.$

22. $\left(\frac{25}{a^2+5a+25}-\frac{2a}{5-a}-\frac{2a^3+10a^2}{a^3-125}\right):\left(a-5+\frac{13a-a^2-30}{a-5}\right).$

Javobi: $\frac{25}{a^2+5a+25}.$

3-§. Irratsional ifodalarni ayniy almashtirish

Agar berilgan matematik ifodada irratsional ifoda qatnashgan bo'lsa, ayniy almashtirishlar orqali irratsional ifodani ratsional ifoda ko'rinishga keltiriladi va u hisoblanadi. Irratsional ifoda bu ildizlardan yoki butun son bo'lmagan ratsional ko'rsatkichli darajadan tashkil topgan algebraik ifodadir. Shuning uchun irratsional ifodaga quyidagicha ta'rif berilgan.

Ta'rif. *Agar berilgan algebraik ifodada ildiz chiqarish amali qatnashsa, bunday ifoda irratsional ifoda deyiladi.*

Irratsional ifodalarni ayniy almashtirish orqali ratsional ifoda ko'rinishiga keltirish uchun asosan ildiz ostida qatnashayotgan birhad yoki ko'phadni ildiz ostidan chiqarish, imkoniyati boricha maxrajni irratsionallikdan qutqarish, noma'lum o'zgaruvchilar kiritish orqali berilgan irratsional ifodani ratsional ifoda ko'rinishiga keltirish kabi ishlar qilinadi.

Bundan tashqari, o'quvchilarga sonning arifmetik ildizi va uning kvadrat ildizi hamda irratsional ifodalarning xossalari kabi tushunchalar tushuntirib o'tilib, so'ngra quyidagi ko'rinishdagi misollarni yechish maqsadga muvofiqdir.

1-misol. $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ ni hisoblang.

Y e c h i s h.

$$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}=\frac{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{5-3}=\sqrt{5}+\sqrt{3}.$$

2-misol. $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{2}+\dfrac{3a\sqrt{a^5}}{4}-\dfrac{\sqrt{a^5}}{4a}\right):\left(-\sqrt{a}\right)$ ifodani soddalashtiring.

Y e c h i s h.

1) $$\frac{\sqrt{a}}{2}+\frac{3a\sqrt{a^5}}{4}-\frac{\sqrt{a^5}}{4a}=\frac{\sqrt{a}}{2}+\frac{3a\sqrt{a^4a}}{4}-\frac{\sqrt{a^4a}}{4a}=$$

$$=\frac{\sqrt{a}}{2}+\frac{3a^3\sqrt{a}}{4}-\frac{a^2\sqrt{a}}{4a}=\frac{2\sqrt{a}+3a^3\sqrt{a}-a\sqrt{a}}{4}=\frac{\sqrt{a}}{4}\cdot(2+3a^3-a);$$

2) $$\frac{\sqrt{a}}{4}(2+3a^3-a):\left(-\sqrt{a}\right)=-\frac{1}{4}(2+3a^2-a).$$

3- misol. $\sqrt{a^3}+a\sqrt{9a}-\dfrac{1}{a}\sqrt{a^5}$ ifodani soddalashtiring.

Y e c h i s h.

$$\sqrt{a^3}+a\sqrt{9a}-\frac{1}{a}\sqrt{a^5}=a\sqrt{a}+3a\sqrt{a}-a\sqrt{a}=3a\sqrt{a}.$$

4-misol. $\dfrac{a}{a-b}\sqrt[3]{(a^2-2ab+b^2)(a^2-b^2)(a+b)}\cdot\dfrac{a^3-b^3}{\sqrt[3]{(a+b)^2}}$

ifodani soddalashtiring.

Yechish. $\frac{a}{a-b}\sqrt[3]{(a^2-2ab+b^2)(a^2-b^2)(a+b)}\cdot\frac{a^3-b^3}{\sqrt[3]{(a+b)^2}}=$

$$=\frac{a}{a-b}\sqrt[3]{(a-b)^2(a+b)(a+b)}\cdot\frac{a^3-b^3}{\sqrt[3]{(a+b)^2}}=$$

$$=\frac{a}{a-b}\cdot(a-b)\cdot\sqrt[3]{(a+b)^2}\cdot\frac{a^3-b^3}{\sqrt[3]{(a+b)^2}}=a(a^3-b^3).$$

5-misol. $\left(\frac{x\sqrt{x}+y\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\sqrt{xy}\right):(x-y)+\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ ifodani soddalashtiring.

Yechish.

1) $\frac{x\sqrt{x}+y\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\sqrt{xy}=\frac{x\sqrt{x}+y\sqrt{x}-\sqrt{xy}\cdot\sqrt{x}-\sqrt{xy}\cdot\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=$

$$=\frac{x\sqrt{x}+y\sqrt{x}-x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{x\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{y}};$$

2) $\frac{x\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}:(x-y)=\frac{x\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}=$

$$=\frac{x}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2};$$

3) $\frac{x}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}+\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{x+2\sqrt{y}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}=\frac{x+2\sqrt{xy}+2y}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}.$

1. Kasrli irratsional ifodalarning maxrajlarini berilishiga qarab irratsionallikdan quyidagicha chiqariladi.

$\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ ko'rinishlarda berilgan bo'lsa, ularning o'zaro ko'paytmasi $\left(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=a-b$ bo'ladi. Agar irratsional ifodalar $\frac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ va

$\dfrac{A}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ ko'rinishlarda berilgan bo'lsa, ularning maxrajlari irratsionallikdan quyidagicha chiqariladi:

1) $\dfrac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{A\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\dfrac{A\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{a-b}$, agar $a\geq 0$, $b\geq 0$, $a\neq b$ bo'lsa.

2) $\dfrac{A}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\dfrac{A\left(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\right)}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\dfrac{A\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{a-b}$, agar $a\geq 0$, $b\geq 0$, $a\neq b$ bo'lsa.

1-misol. $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\dfrac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}.$

2-misol. $\dfrac{5}{2-\sqrt{11}}=\dfrac{5\left(4+\sqrt{11}\right)}{\left(4-\sqrt{11}\right)\left(4+\sqrt{11}\right)}=\dfrac{5\left(4+\sqrt{11}\right)}{16-11}=4+\sqrt{11}.$

2. Agar irratsional ifodalar $\dfrac{A}{\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}}$ va $\dfrac{A}{\sqrt[3]{a^2}\pm\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$ ko'rinishlarda berilgan bo'lsa, ularning irratsionallikdan quyidagicha chiqariladi.

1) $\dfrac{A}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\dfrac{A\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}=\dfrac{A\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{a+b}.$

2) $\dfrac{A}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}=\dfrac{A\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}=\dfrac{A\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{a-b}.$

3) $\dfrac{A}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=\dfrac{A\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)}{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}=\dfrac{A\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)}{a+b}.$

4) $$\frac{A}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=\frac{A\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)}{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}=$$

$$=\frac{A\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)}{a-b}, \quad a\neq b.$$

Misollar.

1) $$\frac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}{\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}\right)}=\frac{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}{3};$$

2) $$\frac{12}{\sqrt[3]{36}+\sqrt[3]{18}+\sqrt[3]{9}}=\frac{12\left(\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{3}\right)}{\left(\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt[3]{36}+\sqrt[3]{18}+\sqrt[3]{9}\right)}=$$

$$\frac{12\left(\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{3}\right)}{6-3}=4\sqrt[3]{6}-4\sqrt[3]{3}=4\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{2}-1).$$

3. Agar irratsional ifoda $\frac{A}{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}}$ va $\frac{A}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}$ ko'rinishlarda berilgan bo'lsa, ularning maxrajlari irratsionallikdan quyidagicha chiqariladi:

$$\frac{A}{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}}=\frac{A\left(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots+\sqrt[n]{ab^{n-2}}+\sqrt[n]{b^{n-1}}\right)}{\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}\right)\left(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots+\sqrt[n]{ab^{n-2}}+\sqrt[n]{b^{n-1}}\right)}=$$

$$=\frac{A\left(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots+\sqrt[n]{ab^{n-2}}+\sqrt[n]{b^{n-1}}\right)}{a-b}.$$

$$\frac{A}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}=\frac{A\left(\sqrt[n]{a^{n-1}}-\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots+(-1)^{n-2}\sqrt[n]{ab^{n-2}}+(-1)^{n-2}\sqrt[n]{b^{n-1}}\right)}{\left(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}\right)\left(\sqrt[n]{a^{n-1}}-\sqrt[n]{a^{n-2}b}-\ldots+(-1)^{n-2}\sqrt[n]{ab^{n-2}}+(-1)^{n-2}\sqrt[n]{b^{n-1}}\right)}=$$

$$=\frac{A\left(\sqrt[n]{a^{n-1}}-\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots+(-1)^{n-2}\sqrt[n]{ab^{n-2}}+(-1)^{n-2}\sqrt[n]{b^{n-1}}\right)}{a+b}.$$

Misollar. 1) $\frac{4}{\sqrt[5]{5}-\sqrt[5]{3}}=\frac{4\left(\sqrt[5]{5^4}+\sqrt[5]{5^3\cdot 3}+\sqrt[5]{5^2\cdot 3^2}+\sqrt[5]{5\cdot 3^3}+\sqrt[5]{3^4}\right)}{5-3}=$

$=2(\sqrt[5]{625}+\sqrt[5]{375}+\sqrt[5]{225}+\sqrt[5]{135}+\sqrt[5]{81}).$

2) $\frac{1}{\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2}}=\frac{\sqrt[4]{3^3}-\sqrt[4]{3^2\cdot 2}+\sqrt[4]{3\cdot 2^2}-\sqrt[4]{2^3}}{3-2}=\sqrt[4]{27}-\sqrt[4]{18}+\sqrt[4]{12}-\sqrt[4]{8}.$

4. Agar irratsional ifoda $\frac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$ ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, uning maxraji irratsionallikdan quyidagicha chiqariladi:

$$\frac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{A(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})}=$$

$$=\frac{A(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})}{a+b-c+2\sqrt{ab}}=\frac{A(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})\left(a+b-c-2\sqrt{ab}\right)}{\left[\left(a+b-c\right)+2\sqrt{ab}\right]\left[\left(a+b-c\right)-2\sqrt{ab}\right]}=$$

$$\frac{A(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})\left(a+b-c-2\sqrt{ab}\right)}{\left(a+b-c\right)^2-4ab};$$

$a\geq 0,\ b\geq 0,\ c\geq 0, \left(a+b+c\right)^2-4ab\neq 0.$

5. Agar $\frac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}$ ifoda berilgan bo‘lsa, uning maxraji irratsionallikdan quyidagicha chiqariladi, agar $ab=cd$ bo‘lsa,

$$\frac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}=\frac{A\left[\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)-\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)\right]}{\left[\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)+\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)\right]\left[\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)-\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)\right]}=$$

$$=\frac{A\left[\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)-\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)\right]}{a+b-c-d}$$

$a\geq 0,\ b\geq 0,\ c\geq 0,\ d\geq 0,\ a+b\neq c+d.$

6. $\dfrac{A}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}$ ifoda berilgan bo'lsa, uning maxraji irratsonallikdan quyidagicha chiqariladi. Buning uchun quyidagi ayniyatlardan foydalanamiz:

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)=x^3+y^3+z^3-3xyz.$$

Agar $x=\sqrt[3]{a}$, $y=\sqrt[3]{b}, z=\sqrt[3]{c}$ desak,

$$\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}-\sqrt[3]{bc}\right)=$$

$$=a+b+c+3\sqrt[3]{abc}.$$

Bu hosil qilingan natijani

$(a+b+c)^2+3(a+b+c)\sqrt[3]{abc}+9\sqrt[3]{(abc)^2}$ ga ko'paytirsak, ya'ni

$$\left[(a+b+c)-3\sqrt[3]{abc.}\right]\left[(a+b+c)^2+3(a+b+c)\sqrt[3]{abc}+9\sqrt[3]{(abc)^2}\right]=$$

$(a+b+c)^2-27abc$ ni hosil qilamiz. Demak,

$$\frac{A}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}=$$

$$=\frac{A(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}-\sqrt[3]{bc})}{\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac-\sqrt[3]{bc}}\right)}=$$

$$=\frac{A\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}-\sqrt[3]{bc}\right)(a+b+c)^2+}{(a+b+c-\sqrt[3]{abc})\left[(a+b+c)^2+3(a+b+c)\sqrt[3]{abc}+\right.}\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{+3(a+b+c)\sqrt[3]{abc}+9\sqrt[3]{(abc)^2}}{\left.+9\sqrt[3]{abc)^2}\right]}=$$

$$=\frac{A\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}-\sqrt[3]{bc}\right)(a+b+c)^2+}{(a+b+c)^3-27abc}\rightarrow$$

$$\to \frac{+3(a+b+c)\sqrt[3]{abc}+9\sqrt[3]{(abc)^2}}{},$$

agar $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c} \neq 0, (a+b+c)^3 \neq 27\, abc$ bo'lsa.

7. Murakkab ildiz formulasi quyidagichadir:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}.$$

Masalan,

1) $\sqrt{11 \pm \sqrt{40}} = \sqrt{\frac{11+\sqrt{121-40}}{2}} + \sqrt{\frac{11-\sqrt{121-40}}{2}} = \sqrt{10} \pm 1;$

2) $\sqrt{15-\sqrt{29}} = \sqrt{\frac{15+\sqrt{225-29}}{2}} - \sqrt{\frac{15-\sqrt{225-29}}{2}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{58}-\sqrt{2}\right).$

1-misol. $\left(\sqrt{ab}+2\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}+\frac{1}{\sqrt{ab}}\right)\cdot\sqrt{ab}$ ifodani soddalashtiring.

Y e c h i s h.

$$\left(\sqrt{ab}+2\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}+\frac{1}{\sqrt{ab}}\right)\cdot\sqrt{ab} =$$

$$= \sqrt{ab}\cdot\sqrt{ab}+2\sqrt{\frac{b}{a}}\cdot\sqrt{ab}-\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{ab}+\frac{1}{\sqrt{ab}}\sqrt{ab} =$$

$$= |a\,b|+2\sqrt{b^2}-\sqrt{a^2}+1 = ab+2|b|-|a|+1.$$

2-misol. $A=\sqrt[6]{8x(7+4\sqrt{3})}\cdot\sqrt{2\sqrt{6x}-4\sqrt{2x}}$ ifodani soddalashtiring.

Y e c h i s h. Agar $x \geq 0$ bo'lsa, $8x(7+4\sqrt{3}) \geq 0, 6x \geq 0$ va $2x \geq 0;$

$7+4\sqrt{3} = 7+2\sqrt{12} = \left(\sqrt{3+2}\right)^2$ u holda

$$A=\sqrt[6]{8x(\sqrt{3}+2)^2}\cdot\sqrt[3]{2\sqrt{6x}-4\sqrt{2}} = \sqrt[3]{2\sqrt{2}x(\sqrt{3}+2)}\cdot\sqrt[3]{2\sqrt{2}x(\sqrt{3}-2)} =$$

$$\sqrt[3]{8x(3+4)} = 2\sqrt[3]{2x}.$$

3-misol. $\left(\dfrac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}+\dfrac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a}\right)\cdot\left(\sqrt{\dfrac{1}{a^2}-1}-\dfrac{1}{a}\right)$ ifodani sodda-lashtiring.

Yechish.

$$A=\left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}+\frac{\sqrt{(1-a)^2}}{\sqrt{1-a^2}-\sqrt{(1-a)^2}}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{1-a^2}{a}}-\frac{1}{a}\right)=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}+\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}\right)\cdot\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a}=\frac{1}{a}\cdot\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a}=$$

$$=\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a^2}.$$

4-misol. $\left(\sqrt[-2]{1+a}+\sqrt{1-a}\right):\left(\sqrt[-2]{1-a^2}+1\right)$ ifodani soddalashtiring.

Yechish.

$$1)\ \sqrt[-2]{1+a}+\sqrt{1-a}=(1+a)^{-\frac{1}{2}}+\sqrt{1-a}=\frac{1}{\sqrt{1+a}}+\sqrt{1-a}=\frac{\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1+a}};$$

$$2)\ \sqrt[-2]{1-a^2}+1=\left(1-a^2\right)^{-\frac{1}{2}}+1=\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}+1=\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-a^2}};$$

$$3)\ \frac{1+\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1+a}}:\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-a^2}}=\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1+a}}\cdot\frac{\sqrt{1-a^2}}{1+\sqrt{1-a^2}}=\sqrt{1-a}.$$

5-misol. $\dfrac{a\sqrt[3]{a}-b\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}+\dfrac{a\sqrt[3]{a}-b\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}$ ifodani soddalashtiring.

Yechish. ***I usul.***

$$\frac{a\sqrt[3]{a}-b\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}+\frac{a\sqrt[3]{a}-b\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}=\frac{\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}+\frac{\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}+\frac{\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}=$$

$$\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}=2\sqrt[3]{a^2}.$$

II usul.

$$\frac{a\sqrt[3]{a}-b\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}+\frac{a\sqrt[3]{a}-b\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}=$$

$$=\frac{\left(a\sqrt[3]{a}-b\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}\right)+\left(a\sqrt[3]{a}-b\sqrt[3]{b^2}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+b\sqrt[3]{b^2}\right)}{a\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{b^4}}=$$

$$=\frac{\left(a\sqrt[3]{a}-b\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{a\sqrt[3]{a}-b\sqrt[3]{b}}=2\sqrt[3]{a^2}.$$

6-misol. $\left(\frac{1}{\sqrt[16]{a}}+\frac{1}{\sqrt[16]{b}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt[16]{a}}-\frac{1}{\sqrt[16]{b}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt[8]{a}}+\frac{1}{\sqrt[8]{b}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt[8]{a}}-\frac{1}{\sqrt[8]{b}}\right)\times$

$$\times\left(\frac{1}{\sqrt[4]{a}}+\frac{1}{\sqrt[4]{b}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt[4]{a}}-\frac{1}{\sqrt[4]{b}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}}\right).$$

Yechish. $\left(\frac{1}{\sqrt[16]{a}}+\frac{1}{\sqrt[16]{b}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt[16]{a}}-\frac{1}{\sqrt[16]{b}}\right).$

1) $(a^{\frac{1}{16}}+b^{\frac{1}{16}})(a^{\frac{1}{16}}-b^{\frac{1}{16}})=a^{\frac{1}{8}}-b^{\frac{1}{8}};$

2) $(a^{\frac{1}{8}}-b^{\frac{1}{8}})(a^{\frac{1}{8}}+b^{\frac{1}{8}})=a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}};$

3) $(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}})(\frac{1}{\sqrt[4]{a}}+\frac{1}{\sqrt[4]{b}})(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}})=a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}};$

4) $(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})=a^{-1}-b^{-1};$

5) $\left(a^{-1}-b^{-1}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\left(a^{-1}-b^{-1}\right)\left(a^{-1}+b^{-1}\right)=a^{-2}-b^{-2}=\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}.$

MUSTAQIL YECHISH UCHUN MISOLLAR

1. $\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x-1}}.$ *Javobi:* $\frac{1}{x}(x+\sqrt{1-x^2})$.

2. $\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{a+\sqrt{a^2-4}}+\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{a+\sqrt{a^2+4}}:\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{a+\sqrt{a^2+4}}.$ *Javobi:* $\frac{2a}{a+\sqrt{a^2+4}}$.

3. $\left(\frac{\sqrt{y+1}}{\sqrt{y+1}-\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y+1}+\sqrt{y}}\right):(2y+1)+\sqrt{\frac{1}{y^2}-1}-1.$ *Javobi:* $\frac{1}{y}\sqrt{1-y^2}$.

4. $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-1.$ *Javobi:* $-\frac{\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{ab^2}+b}{a-b}$ *agar* $a\neq b$ bo‘lsa.

5. $3b\sqrt[4]{\frac{a^7\sqrt[3]{a^2}}{27b^2}}.$ *Javobi:* $a\sqrt[12]{27a^{11}b^6}$ *agar* $b>0,\ a\geq 0$ bo‘lsa.

6. $(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})^2-(4xy)^{\frac{1}{2}}.$ *Javobi:* $x+y$.

7. $\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x^2-\sqrt{x}\right)^{-1}}{\left(x+\sqrt{x}+x\sqrt{x}\right)^{-1}}.$ *Javobi:* $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$.

8. $\frac{a-1}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}+1}\cdot a^{\frac{1}{4}}+1.$ *Javobi:* $\sqrt{a}$.

9. $\left[\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}+1}{2}\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}-1}{2}\right]^{\frac{1}{2}}.$ *Javobi:* $\frac{2\sqrt[4]{1-x^2}}{x}$.

10. $\left(\frac{y-\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\sqrt{x}\right):\left(\frac{y}{\sqrt{xy}-x}+\frac{x}{\sqrt{xy}+y}-\frac{x+y}{\sqrt{xy}}\right)$. *Javobi:* $\sqrt{y}-\sqrt{x}$.

11. $\left(\frac{\sqrt{x^3}-2}{\sqrt{x}-2x}+\sqrt{x}\right):\left(\frac{\sqrt{x^3}+2}{\sqrt{x}+2x}-\sqrt{x}\right):\frac{1+\frac{1}{4}x^2}{x-\frac{1}{4}}$. *Javobi:* $\frac{1-x}{x}$.

12. $\left(\frac{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{a}}{1-\sqrt{a}}+\frac{1+\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}\right)^2:\left(1+\frac{2}{\sqrt{a}}+\frac{1}{a}\right)$. *Javobi:* $\frac{\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+1)^2}$.

13. $\frac{(a+b)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}$. *Javobi:* $\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}$.

4-§. Trigonometrik ifodalarni ayniy almashtirish

Maktab matematika kursining trigonometriya bo'limida juda ko'p ayniy munosabatlar, jumladan, quyidagi munosabatlar o'rganiladi:

1. Trigonometrik funksiyalarning birini ikkinchisi orqali ifodalaydigan ayniy almashtirishlar.
2. Trigonometrik ifodalarni soddalashtirishdagi ayniy almashtirishlar.
3. Trigonometrik ayniyatlarni isbotlashdagi ayniy almashtirishlar.
4. Trigonometrik tenglamalarni yechishdagi ayniy almashtirishlar.

Yuqoridagilardan ko'rinadiki, trigonometriya kursida ayniy almashtirishlar muhim o'rinni egallaydi. IX sinf geometriya kursida trigonometrik funksiyalarga ta'rif berilganidan so'ng, to'rtta trigonometrik funksiyalarni o'zaro bog'lovchi quyidagi uchta ayniyat o'rganiladi:

$$1.\ \cos^2 a+\sin^2 a=1; \qquad 2.\ tga=\frac{\sin a}{\cos a}; \qquad 3.\ ctga=\frac{\cos a}{\sin a}.$$

Bu ayniyatlarni keltirib chiqarish maktab geometriya kursida batafsil bayon qilingan. Bu ayniyatdardan yana quyidagi uchta ayniyat keltirib chiqariladi:

$$1.\ tga\cdot ctga=1; \quad 2.\ \frac{1}{\cos^2 a}=1+tg^2 a; \quad 3.\ \frac{1}{\sin^2 a}=1+ctg^2 a.$$

Yuqoridagi ayniyatlar trigonometrik ifodalarni hisoblashda bajariladigan ayniy shakl almashtirishlarda eng ko‘p qo‘llaniladigan ayniyatlar bo‘lib hisoblanadi. O‘qituvchi o‘quvchilarga ildizli ifodalar ustida bajariladigan trigonometrik ayniy shakl almashtirishlarni bajarishga alohida e’tibor berishi lozim.

Masalan, $\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ ifodani olaylik. Buni hisoblaydigan bo‘lsak, $\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\pm\sin a$ tengligi o‘rinli bo‘ladi.

O‘quvchilarga $\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sin\alpha$ va $\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sin\alpha$ tengliklarning ma’nosini tushuntirish lozim. Bunda $\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\pm\sin\alpha$ qiymat I chorakdagi, $\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sin\alpha$ esa III chorakdagi qiymat ekanligini geometrik nuqtayi nazaridan ko‘rsatib tushuntirish maqsadga muvofiq. Bundan tashqari, α ning aniq son qiymatlarida ham bu ifodalarni hisoblash lozim.

Masalan, $\alpha=\frac{\pi}{3}$ bo‘lganda $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ shuning uchun $\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ammo $-\sin\alpha=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Demak, $\sqrt{1-\cos^2\alpha}=$ $=\pm\sin\alpha$ ekan.

O‘quvchilar ayniy shakl almashtirishlarni yaxshi o‘zlashtirishlari uchun birinchidan trigonometrik funksiyalar ta’rifini, ulardan birini ikkinchisi orqali ifodalovchi va asosiy ayniyatlar kabi formulalarni bilishlariga, ikkinchidan esa ana shu formulalarni trigonometrik ifoda berilishiga qarab tatbiq qila olish malakalariga bog‘liqdir. Maktab matematika kursidagi trigonometrik ayniy shakl almashtirishlarni og‘zaki bajarishga o‘quvchilarni o‘rgatish ularda mantiqiy matematik tafakkurni shakllantiradi. O‘qituvchi biror trigonometrik ifodaning shaklini almashtirishni bajarishdan oldin o‘quvchilarga eng sodda bo‘lgan og‘zaki trigonometrik mashqlardan namunalarni doskaga yozib, o‘quvchilardan tezroq og‘zaki soddalashtirishni bajarishlarini talab qilishi o‘quvchilarni trigonometrik ayniyat va formulalarni esda doimo saqlashlariga imkon yaratadi.

Masalan,

$$1-\cos^2;\quad 1-\sin^2\alpha;\quad (1-\cos\alpha)(1+\cos^2\alpha);$$

$$\sin\alpha\cdot tg\alpha\ \cos^2\alpha;\quad \frac{tg\alpha}{ctg\alpha};\ \frac{tg\alpha}{ctg\alpha}-tg\alpha;\ \frac{tg\alpha}{ctg\alpha}+1;\ \frac{\cos\alpha}{tg\alpha}.$$

Bundan keyin o'qituvchi murakkabrok trigonometrik almashtirishlarni ko'rsatishi maqsadga muvofiqdir.

1-misol. $(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)-\cos^2\alpha$ ifodani soddalashtiring.

I usul.

$$(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)-\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=$$
$$=1-\left(1-\cos^2\alpha\right)-\cos^2\alpha=1-1+\cos^2\alpha-\cos^2\alpha=0.$$

II usul.

$$(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)-\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=$$
$$=1-(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=1-1=0.$$

2-misol. $\dfrac{\sin^4 x+\cos^4 x-1}{\sin^6 x+\cos^6 x-1}$ ifodani soddalashtiring.

$$\frac{\sin^4 x+\cos^4 x-1}{\sin^6 x+\cos^6 x-1}=\frac{\left(\sin^2 x\right)^2+\cos^4 x-1}{\left(\sin^2 x\right)^3+\cos^6 x-1}=\frac{\left(1-\cos^2 x\right)^2+\cos^4 x-1}{\left(1-\cos^2 x\right)^3+\cos^6 x-1}=$$

$$=\frac{1-2\cos^2 x+\cos^4 x+\cos^4 x-1}{1-3\cos^2 x+3\cos^4 x-\cos^6 x+\cos^6 x-1}=\frac{2\cos^2 x(\cos^2 x-1)}{3\cos^2 x(\cos^2 x-1)}=\frac{2}{3}.$$

3-misol. $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}=ctg\alpha$ ayniyatni isbotlang.

$$\frac{cos(\alpha+\beta)+cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}=$$

$$=\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}=$$

$$=\frac{2\cos\alpha\cos\beta}{2\sin\alpha\cos\beta}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=ctg\alpha.$$

4-misol. $\dfrac{1+\cos\beta+\cos^2\beta}{1+\sec\beta+\sec^2\beta}$ ifodani soddalashtiring.

$$\frac{1+cos\beta+\cos^2\beta}{1+\sec\beta+\sec^2\beta}=\frac{1+cos\beta+\cos^2\beta}{1+\dfrac{1}{cos\beta}+\dfrac{1}{\cos^2\beta}}=\frac{1+cos\beta+\cos^2\beta}{\dfrac{\cos^2\beta+cos\beta+1}{\cos^2\beta}}=$$

$$=\frac{\left(1+cos\beta+\cos^2\beta\right)\cos^2\beta}{\cos^2\beta+\cos\beta+1}=\cos^2\beta.$$

Yuqoridagilardan ko'rinadiki, trigonometriya kursida ayniy almashtirishlar muhim o'rin egallaydi. O'quvchilar trigonometrik ayniy shakl almashtirishlarni yaxshi o'zlashtirishlari uchun birinchidan, trigonometrik funksiyalarning birini ikkinchisi orqali ifodalovchi va asosiy ayniyat kabi formulalarni, ikkinchidan esa shu formulalarni trigonometrik ifodanı berilishiga qarab tatbiq qila olish malakalariga bog'liqdir. Trigonometrik ayniy shakl almashtırishlarni bajarish uchun quyidagi formulalarni bilishlari kerak:

1. Asosiy trigonometrik ayniyatlar:

1) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;$ 2) $tg\alpha=\dfrac{\sin a}{\cos a},\left[a\neq\dfrac{\pi}{2}(2n+1)\right],\ n\in Z;$

3) $ctg\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ (\alpha\neq\pi n);$ 4) $\sec\alpha=\dfrac{1}{\cos a},\left[a\neq\dfrac{\pi}{2}(2n+1)\right],\ n\in Z;$

5) $\cos ec\alpha=\dfrac{1}{\sin\alpha},\ (\alpha\neq\pi n);\ n\in Z.$

Bu ayniyatlardan kelib chiqadigan formulalar quyidagilardir:

1) $tg\alpha\cdot ctg\alpha=1\quad\left(\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}n\right),\ n\in Z.$

2) $1+tg^2\alpha=sec^2\alpha,\quad\left[\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}(2n+1)\right],\ n\in Z.$

3) $1+ctg^2\alpha=\cos ec^2\alpha,\quad(\alpha\neq\pi),\quad n\in Z.$

1-misol. Ayniyatni isbotlang.

$$\cos^2\alpha(tg\alpha+2)(2tg\alpha+1)-5\sin\alpha\cos\alpha=2,\left[\alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1)\right].$$

Isboti:

$$\cos^2\alpha(tg\alpha+2)(2tg\alpha+1)-5\sin\alpha\cos\alpha=$$

$$=\cos^2\alpha\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+2\right)\left(\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}+1\right)-5\sin\alpha\cos\alpha=$$

$$=2\sin^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-5\sin\alpha\cos\alpha=$$

$$=2(\sin^2 a+\cos 2\alpha)=2.$$

2-misol. Ayniyatni isbotlang:

$$(1+\sin\alpha)(tg\alpha+ctg\alpha)(1-\sin\alpha)=ctg\alpha.\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2},n\in Z\right).$$

Isboti:

$$(1+\sin\alpha)(tg\alpha+ctg\alpha)(1-\sin\alpha)=(1+\sin\alpha)\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)(1-\sin\alpha)=$$

$$=\frac{(1-\sin^2\alpha)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha\ \cos\alpha}=ctg\alpha.$$

II. Ikki burchak yig'indisi va ayirmasining trigonometrik funksiyalari.

1) $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta;$

2) $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta;$

3) $tg(\alpha\pm\beta)=\dfrac{tg\alpha\pm tg\beta}{1\pm tg\alpha\cdot tg\beta};$

$$\left[\alpha,\beta,\alpha\pm\beta\neq\frac{\pi}{2}(2n+1),n\in Z\right];$$

4) $ctg(\alpha\pm\beta)=\dfrac{ctg\alpha\ \ ctg\beta\mp 1}{ctg\alpha\pm ctg\beta}.\qquad(\alpha,\beta,\alpha=\beta\neq\pi n,n\in Z).$

1-misol. cos15° ni hisoblang.

Yechish.

$$\cos 15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)=\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ=$$

$$=\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{\sqrt3}{2}+\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac12=\frac14\left(\sqrt6+\sqrt2\right)\approx 0{,}9659.$$

2-misol. $\sin 15^\circ$ ni hisoblang .

Y e c h i s h.

$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right).$$

Shuningdek, $tg15^\circ = 2-\sqrt{3}$, $cg15^\circ = 2+\sqrt{3}$, $\sec 15^\circ = \sqrt{6}-\sqrt{2}$ larni hisoblash mumkin.

3-misol. $\dfrac{tg^2 a - tg^2\beta}{1 - tg^2 a \cdot tg^2\beta} = tg(a+\beta)(tga-\beta)$ ayniyatni isbotlang.

I s b o t i. $\dfrac{tg^2 a - tg^2\beta}{1 - tg^2 a \cdot tg^2\beta} = \dfrac{tga + tg\beta}{1 - tga\cdot tg\beta}\cdot\dfrac{tga - tg\beta}{1 + tga\cdot tg\beta} =$

$$= tg(\alpha+\beta)tg(\alpha-\beta).$$

4-misol. $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$ ayniyatni isbotlang.

I s b o t i. $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta) = (\sin\alpha\cos\beta + \cos a\sin\beta)\times$

$$\times(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta) = \sin^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\beta\cos^2\alpha =$$

$$= \sin^2\alpha(1-\sin^2\beta) - \sin^2\beta(1-\sin^2\alpha) = \sin^2\alpha - \sin^2\alpha\sin^2\beta -$$

$$-\sin^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta = \sin^2\alpha - \sin^2\beta.$$

Keltirish formulalari:

1) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\pm\alpha\right) = \cos\alpha,\quad \sin(\pi\pm\alpha) = \mp\sin\alpha;$

2) $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}\pm\alpha\right) = -\cos\alpha,\quad \sin(2\pi\pm\alpha) = \pm\sin\alpha;$

3) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\pm\alpha\right) = \mp\sin\alpha,\quad \cos(\pi\pm\alpha) = -\cos\alpha;$

4) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\pm\alpha\right) = \pm\sin\alpha,\quad \cos(2\pi\pm\alpha) = \cos\alpha;$

5) $tg\left(\dfrac{\pi}{2}\pm\alpha\right) = \mp ctg\alpha,\quad tg(\pi\pm\alpha) = \pm tg\alpha;$

6) $ctg\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp tg\alpha, \quad ctg(\pi \pm \alpha) = \pm ctg\alpha.$

IV. Ikkilangan va uchlangan burchakning trigonometrik funksiyalari:

1) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$; 2) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$;

3) $tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} \quad \left[2\alpha, \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), n \in Z\right]$;

4) $ctg2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha} \quad (2a, \alpha \neq \pi n, n \in Z)$;

5) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$; 6) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$;

7) $tg3\alpha = \frac{1 - 3tg^2\alpha}{3tg\alpha - tg^3\alpha} \quad \left[2\alpha,\ \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1),\ n \in Z\right]$;

8) $ctg3\alpha = \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^2\alpha} \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi n}{3},\ n \in Z\right)$;

9) $\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$; 11) $\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$;

10) $\sin^3\alpha = \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4}$; 12) $\cos^3\alpha = \frac{\cos 3\alpha + 3\cos\alpha}{4}$.

1-misol. $\sin\alpha \cdot \sin(60^\circ - \alpha) \cdot \sin(60^\circ + \alpha) = \frac{1}{4}\sin 3a$ ayniyatni isbotlang.

Isboti: $\sin\alpha \cdot \sin(60^0 - \alpha) \cdot \sin(60^0 + \alpha) = \sin\alpha(\sin^2 60^0 - \sin^2\alpha) =$

$$= \sin\alpha\left(\frac{3}{4} - \sin^2\alpha\right) = \frac{1}{4}\left(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha\right) = \frac{1}{4}\sin 3\alpha.$$

2-misol. $\cos\alpha \cdot \cos(60^\circ - \alpha) \cdot \cos(60^\circ + \alpha) = \frac{1}{4}\cos 3\alpha$ ayniyatni isbotlang.

3-misol. $tg\alpha \cdot tg(60^\circ - \alpha) \cdot tg(60^\circ + \alpha) = tg3\alpha$ ayniyatni isbotlang.

Bu ayniyatlardan foydalanib, quyidagi trigonometrik ifodalarni osonlikcha hisoblash mumkin:

a) $\sin 20^0 \cdot \sin 40^0 \cdot \sin 80^0 = \frac{1}{4}\sin 3 \cdot 20^0 = \frac{1}{4}\sin 60^0 = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}$;

b) $\cos 10^0 \cdot \cos 50^0 \cdot \cos 70^0 = \frac{1}{4}\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{8}$;

c) $tg6^0 \cdot tg54^0 \cdot tg66^0 = tg18^0$.

4-misol. $\sin 3\alpha \cos^3\alpha + \sin^3\alpha \cos 3\alpha = \frac{3}{4}$ $\sin\alpha$ ayniyatni isbotlang.

Isboti:

$$\sin 3\alpha \cos^3\alpha + \sin^3\alpha \cos 3\alpha = \sin 3\alpha \frac{\cos 3\alpha + 3\cos\alpha}{4} +$$

$$+\cos 3\alpha \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4} = \frac{3}{4}(\sin 3\alpha \cos\alpha + \sin\alpha \cos 3\alpha) = \frac{3}{4}\sin 4\alpha.$$

5-misol. $\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha$ ifodani soddalashtiring.

Yechish. Berilgan ifoda $\sin\alpha$ ga ko'paytiriladi hamda bo'linadi:

$$\frac{\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot \sin\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{1}{2}\sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha}{\sin\alpha} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 4\alpha \cdot \cos 4\alpha\right)}{\sin\alpha} = \frac{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 8\alpha\right)\right]}{\sin\alpha} = \frac{\sin 8\alpha}{8\sin\alpha}.$$

6-misol. $tg4\alpha - \sec 4\alpha = \frac{\sin 2a - \cos 2a}{\sin 2a + \cos 2a}$ ayniyatni isbotlang.

V. Yarim argumentning trigonometrik funksiyalari

1) $\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$; 2) $\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$;

3) $\left|tg\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$; $[\alpha \neq \pi(2n+1),\ n \in Z]$;

4) $\left|ctg\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$;

5) $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$; $(\alpha \neq \pi n, n \in Z)$;

6) $ctg\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$; $(\alpha\neq\pi n, n\in Z)$.

1-misol. $tg7^0 30'$ ni hisoblang.

Yechish.

$$tg7^0 30'=\frac{1-\cos15^0}{\sin15^0}=\frac{1-\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}=\frac{\left(4-\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\frac{4\sqrt{6}+4\sqrt{2}-4\sqrt{3}-8}{4}=\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2.$$

2-misol. $\frac{1-tg^2 15^0}{1+tg^2 15^0}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ni isbotlang.

Isboti. $\frac{1-tg^2 15}{1+tg^2 15}=\frac{1-\frac{1-\cos30^0}{1+\cos30}}{1+\frac{1-\cos30^0}{1+\cos30^0}}=\cos30^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

VI. Trigonometrik funksiyalar ko'paytmasini yig'indiga keltirish formulalari:

1) $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$;

2) $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$;

3) $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$.

Misol. $\cos\alpha+\cos(\alpha+2\beta)+...+\cos(\alpha+\pi\beta)$ ifodani soddalashtiring.

Yechish. Berilgan ifodani $\sin\frac{\beta}{2}$ ga ko'paytiramiz va bo'lamiz:

$$\frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}}\left[\sin\frac{\beta}{2}\cos\alpha+\sin\frac{\beta}{2}\cos(\alpha+\beta)+\sin\frac{\beta}{2}\cos(\alpha+2\beta)+\right.$$

$$+\ldots+\sin\frac{\beta}{2}\cos(\alpha+n\beta)\Big]=\frac{1}{2\sin\frac{\beta}{2}}\left[\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)-\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)+\right.$$

$$+\sin\left(\alpha+\frac{3\beta}{2}\right)-\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)+\sin\left(\alpha+\frac{5\beta}{2}\right)-\sin\left(\alpha+\frac{3\beta}{2}\right)+\ldots+$$

$$+\sin\left(\alpha-\frac{3\beta}{2}\right)-\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)+\sin\left(\alpha+\frac{5\beta}{2}\right)-\sin\left(\alpha+\frac{3\beta}{2}\right)+\ldots+$$

$$\left.+\sin\left(\alpha+\frac{2n+1}{2}\beta\right)-\sin\left(\alpha+\frac{2n-1}{2}\beta\right)\right]=\frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}}\left[\sin\left(\alpha+\frac{2n+1}{2}\beta\right)-\right.$$

$$=\frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}}2\sin\frac{n+1}{2}\beta\cos\left(\alpha+\frac{n}{2}\beta\right)=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\beta\cos\left(\alpha+\frac{n}{2}\beta\right)}{\sin\frac{\beta}{2}}.$$

VII. Trigonometrik funksiyalar yig'indisi va ayirmasining formulalari:

1) $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$

2) $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$

3) $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$

4) $\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$

5) $tg\alpha+tg\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta},\quad\left[\alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}(2n-1),n\in Z\right];$

6) $tg\alpha-tg\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta},\quad\left[\alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}(2n-1),n\in Z\right];$

7) $ctg\alpha+ctg\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta},\quad[\alpha,\beta\neq\pi n,n\in Z];$

8) $ctg\alpha - ctg\beta = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$.

Misol.

$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos(\alpha+\beta+\gamma) =$

$= 4\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\gamma}{2}\cos\dfrac{\beta+\gamma}{2}$ ayniyatni isbotlang.

Isboti.

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos(\alpha+\beta+\gamma) =$$

$$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\cos\frac{\gamma+\alpha+\beta+\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma-\alpha-\beta-\gamma}{2} =$$

$$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}\right) =$$

$$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} 2\cos\frac{\alpha-\beta+\alpha-\beta+2\gamma}{4}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta-\alpha-\beta-2\gamma}{4} =$$

$$= 4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}.$$

VII. Trigonometrik funksiyalarni yarim argumentning tangensi orqali ifodalash:

1) $\sin a = \dfrac{2tg\frac{a}{2}}{1+tg^2\frac{a}{2}}$ $[a \neq \pi(2n+1), n \in Z]$;

2) $\cos a = \dfrac{1-tg^2\frac{a}{2}}{1+tg^2\frac{a}{2}}$ $[a \neq \pi(2n+1), n \in Z]$;

3) $tga = \dfrac{2tg\frac{a}{2}}{1-tg^2\frac{a}{2}}$ $\left[a, \frac{a}{2} \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), n \in Z\right]$.

5-§. Trigonometrik ifodalarni soddalashtirishga doir misollar yechish metodikasi

1-misol. $(1-\sin a)(1+\sin a)-\cos^2 a$ ifodani soddalashtiring.

Yechish. *I usul.*

$$(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)-\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha = 1-(1-\cos^2\alpha)-$$
$$-\cos^2\alpha = 1-1+\cos^2\alpha-\cos^2\alpha = 1-1+\cos^2\alpha-\cos^2\alpha = 0.$$

II usul. $(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)-\cos^2\alpha =$

$$= 1-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha = 1-(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha) = 1-1 = 0.$$

2-misol. $\dfrac{\sin^4 x+\cos^4 x-1}{\sin^6 x+\cos^6 x-1}$ ifodani soddalashtiring.

Yechish. $\dfrac{\sin^4 x+\cos^4 x-1}{\sin^6 x+\cos^6 x-1} = \dfrac{\left(\sin^2 x\right)^2+\cos^4 x-1}{\left(\sin^2 x\right)^3+\cos^6 x-1} =$

$$= \frac{(1-\cos^2 x)^2+\cos^4 x-1}{(1-\cos^2 x)^3+\cos^6 x-1} = \frac{1-2\cos^2 x+\cos^4 x+\cos^4 x-1}{1-3\cos^2 x+3\cos^4 x-\cos^6 x+\cos^6 x-1} =$$
$$= \frac{2\cos^2 x(\cos^2 x-1)}{3\cos^2 x(\cos^2-1)} = \frac{2}{3}.$$

3-misol. $\dfrac{1-(\sin x-\cos x)^2}{1+\sin^2 x-\cos^2 x}$ ifodani soddalashtiring.

Yechish. $\dfrac{1-(\sin x-\cos x)^2}{1+\sin^2 x-\cos^2 x} = \dfrac{1-\sin^2 x+2\sin x\cos x-\cos^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x+\sin^2 x-\cos^2 x} =$

$$= \frac{1-(\sin^2 x+\cos^2 x)+2\sin x\cos x}{2\sin^2 x} = \frac{2\sin x\cos x}{2\sin^2 x} = \frac{\cos x}{\sin x} = ctgx.$$

4-misol. $\dfrac{1}{\cos^2 x}-\dfrac{1}{ctg^2 x}-\dfrac{\sin^2 x}{tg^2 x}$ ifodani soddalashtiring.

Yechish.

$$\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{ctg^2 x}-\frac{\sin^2 x}{tg^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-\frac{\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^2 x}=$$

$$=\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-\cos^2 x=\frac{1-\sin^2 x-\cos^4 x}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x-\cos^4 x}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos^2 x(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x}=\sin^2 x.$$

5-misol. $\dfrac{[\cos(-a)+\sin(-a)]^2-1}{\cos^2(-a)+\sin^2(-a)-1}$ ifodani soddalashtiring.

$$\frac{[\cos(-a)+\sin(-a)]^2-1}{\cos^2(-a)+\sin^2(-a)-1}=\frac{(\cos a-\sin a)^2-1}{\cos^2 a-\sin^2 a-1}=$$

$$=\frac{\cos^2 a-2\cos a\sin a+\sin^2 a-1}{\cos^2 a-\sin^2 a-(\cos^2 a+\sin^2 a)}=\frac{-2\cos a\sin a}{-2\sin^2 a}=ctga.$$

6-misol. $1+\sin\alpha+\cos\alpha$ ifodani ko'paytma shakliga keltiring.

Yechish. $1+\sin\alpha+\cos\alpha=(1+\cos\alpha)+\sin\alpha=$

$$=2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin\left(90^0-\frac{\alpha}{2}\right)+\sin\frac{\alpha}{2}\right)=2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin 45^0\times$$

$$\times\cos\left(45^0-\frac{\alpha}{2}\right)=2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\left(45^0-\frac{\alpha}{2}\right).$$

7-misol. $\sqrt{3}-2\sin\alpha$ ifodani ayniy almashtirish orqali ko'paytma shakliga keltiring.

Yechish. $\sqrt{3}-2\sin\alpha=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\sin\alpha\right)=2\left(\sin 60^0-\sin\alpha\right)=$

$$=4\sin\left(30^0-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(30^0+\frac{\alpha}{2}\right).$$

MUSTAQIL YECHISH UCHUN MISOLLAR

1. $\dfrac{4-2tg45^\circ+tg60^\circ}{3\sin 90^\circ-4\cos 60^\circ+4ctg45^\circ}$. *Javobi:* $\dfrac{2+\sqrt{3}}{5}$.

2. $\dfrac{4-tg^2\dfrac{\pi}{4}+ctg^4\dfrac{\pi}{3}}{3\sin^3\dfrac{\pi}{2}+\cos^2\dfrac{\pi}{3}+ctg\dfrac{\pi}{4}}$. *Javobi:* $\dfrac{112}{153}$.

3. $\left(4\sin\dfrac{\pi}{4}\right)^2-\left(2tg\dfrac{\pi}{6}\right)^2-\left(2\cos\dfrac{\pi}{6}\right)^2-\left(2ctg\dfrac{\pi}{4}\right)^2$. *Javobi:* -1.

4. $\sin 2\pi+\cos 4\pi+tg2\pi\sqrt{b-4ac}$. *Javobi:* 1.

5. $ctg\dfrac{\pi}{2}+\operatorname{cosec}\dfrac{\pi}{2}+\sec 0^\circ$. *Javobi:* 2.

6. $a^2\sin\dfrac{\pi}{2}+2ab\cos\pi-b^2\sin\dfrac{3}{2}\pi$. *Javobi:* $(a-b)^2$.

7. $10tg2\pi+3\cos\dfrac{3}{2}\pi-4tg\pi-5\sin\dfrac{3}{2}\pi$. *Javobi:* 5.

8. $4\sin 90^\circ+3\cos 720^\circ-3\sin 630^\circ+5\cos 900^\circ$. *Javobi:* 5.

9. $5tg540^\circ+2\cos 1170^\circ+4\sin 990^\circ-3\cos 540^\circ$. *Javobi:* -1.

10. $100ctg^2 990^\circ+25tg^2 540^\circ-3\cos^2 900$. *Javobi:* -3.

11. $tg900^\circ-\sin(-1095^\circ)+\cos(-1460^\circ)$. *Javobi:* $\sqrt{1,5}$.

12. $\sin(-1125^\circ)+\cos^2(-900^\circ)+tg1710^\circ$. *Javobi:* $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$.

13. $\cos 20^\circ+\cos 40^\circ+\cos 60^\circ+\ldots+\cos 160^\circ+\cos 180^\circ$. *Javobi:* -1.

14. $\sin\left(-\dfrac{14\pi}{3}\right)+\operatorname{cosec}^2\dfrac{29\pi}{4}-tg^2\dfrac{3\pi}{4}$. *Javobi:* $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$.

15. $\dfrac{5+\sin 30^0 \cos 60^0 - tg\dfrac{\pi}{4}}{a+b\cos 2\pi - \sin\pi}$. Javobi: $\dfrac{17}{4(a+b)}$.

16. $\dfrac{m\cos\dfrac{\pi}{4}+n\sin\dfrac{\pi}{4}-tg\pi}{mn-mtg\dfrac{\pi}{4}-ctg\dfrac{\pi}{2}}$. Javobi: $\dfrac{\sqrt{2}(m+n)}{2m(n-1)}$.

17. $(\sin\varphi+\cos\varphi)^2+(\sin\varphi-\cos\varphi)^2$. Javobi: 2.

18. $\dfrac{1+\cos\beta+\cos^2\beta}{1+\sec\beta+\sec^2\beta}$. Javobi: $\cos^2\beta$.

19. $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cos^2\dfrac{\alpha}{2}+\cos^4\dfrac{\alpha}{2}$. Javobi: 1.

20. $\dfrac{1}{\cos ec^2 2\alpha-1}+\dfrac{\cos^2 2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$. Javobi: $\sec^2 2\alpha$.

21. $\dfrac{1-tg^2\beta}{1+tg^2\beta}+\sin^2\beta$. Javobi: $\cos^2\beta$.

22. $\left(1-\cos^2 x\right)ctg^2x-1$. Javobi: $-\sin^2 x$.

23. $\cos^4 x-\sin^4 x+\sin^2 x$. Javobi: $\cos^2 x$.

24. $\dfrac{1-\sin^4 2\alpha-\cos^4 2\alpha}{2\sin^4 2\alpha}+1$. Javobi: 1.

25. $\left(1-\cos^2\beta\right)tg^2\beta-\sec^2\beta$. Javobi: $-\cos^2\beta$.

26. $cos^2\dfrac{\alpha}{2}co\sec^2\dfrac{\alpha}{2}+\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cdot co\sec^2\dfrac{\alpha}{2}$. Javobi: $co\sec^2\dfrac{\alpha}{2}$.

27. $\dfrac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}-2ctg^2\alpha$. Javobi: 0.

28. $\dfrac{1+2\sin 2x\cdot\cos 2x}{\cos 2x+\sin 2x}-\cos 2x$. Javobi: $\sin 2x$.

Takrorlash uchun savollar

1. *Ayniy shakl almashtirish deb nimaga aytiladi?*
2. *Ayniyat tushunchasini ta'riflab bering.*
3. *Birhad deb nimaga aytiladi?*
4. *Ko'phad deganda nimani tushunasiz?*
5. *O'xshash hadni ta'riflab bering.*
6. *Ixchamlash deganda nimani tushunasiz?*
7. *Qanday ifodaga kasr ratsional ifoda deyiladi?*
8. *Irratsional ifodani ta'riflab bering.*
9. *Trigonometrik ifodalardagi ayniy almashtirishlar qanday bajariladi?*
10. *Ikki burchak yig'indisi va ayirmasining sinusi nimaga teng?*
11. *Ikki burchak yig'indisi va ayirmasining kosinusi nimaga teng?*
12. *Ikki burchak yig'indisi va ayirmasining tangensi nimaga teng?*
13. *Ikki burchak yig'indisi va ayirmasining kotangensi nimaga teng?*
14. *Asosiy trigonometrik ayniyatlarni yozib bering.*
15. *Ikkilangan va uchlangan trigonometrik funksiyalarni tushuntirib bering.*
16. *Yarim argumentni trigonometrik funksiyalari deganda nimani tushunasiz?*
17. *Trigonometrik funksiyalar ko'paytmasini yig'indiga qanday keltiriladi?*
18. *Trigonometrik funksiyalar yig'indisi va ayirmasining ko'paytmaga qanday keltiriladi?*
19. *Trigonometrik funksiyalarni yarim argumentli tangensi orqali qanday ifodalanadi?*
20. *Trigonometrik ifodalarni soddalashtirish deganda nimani tushunasiz?*

Tayanch iboralar

Ayniyat tushunchasi, birhad, ko'phad, o'xshash had, ixchamlash, kasr ratsional ifoda, irratsional ifoda, trigonometrik ifoda, ikki burchak yig'indisining sinusi, kosinusi, tangensi, kotangensi, ikki burchak ayirmasining sinusi, kosinusi, tangensi va kotangensi, trigonometrik ayniyat, ikkilangan trigonometrik funksiyalar.

VIII bob.
TENGLAMALARNI O'RGANISH METODIKASI

1-§. Tenglama tushunchasini kiritish metodikasi

Maktab matematika kursida tenglama tushunchasi konkret-induktiv metod orqali kiritiladi. O'quvchilar IV sinfgacha natural sonlar ustida ta'rifsiz to'rt amalni bajarishni o'rganadilar, so'ngra o'quvchilarga qo'shish, ayirish, bo'lish amallarida qatnashayotgan komponentlardan ikkitasi ma'lum bo'lganda noma'lum qatnashayotgan komponentni topish o'rgatiladi. Bunda ana shu topilishi kerak bo'lgan komponentni harf bilan belgilanadi. Masalan, qanday songa 4 ni qo'shsak, 7 soni hosil bo'ladi? $x + 4 = 7$. Qanday sondan 8 ni ayirsak, 10 soni hosil bo'ladi? $x - 8=10$. Qanday sonni 5 ga bo'lsak, 7 soni hosil bo'ladi? $x : 5 = 7$, 18 soni qanday songa bo'linsa, 3 soni hosil bo'ladi? $18 : x=3$. Shu xildagi savollar asosida harfiy ifoda qatnashgan to'rt amalga doir tengliklarni hosil qilishi mumkin. O'quvchilar $x + 4 = 7$ tenglikdagi noma'lum x sonini topishni ayirish mavzusidan biladilar, ya'ni «noma'lum qo'shiluvchini topish uchun yig'indidan ma'lum qo'shiluvchini ayirish kerak» degan qoidaga ko'ra berilgan $x + 4 = 7$ tenglikdagi noma'lum sonni quyidagicha topadilar: $x = 7 - 4 = 3$. Ana shu fikrlarni o'quvchilarga tushuntirib, so'ngra $x + 4 = 7$ tenglik matematika kursida tenglama deb atalishini, so'ngra unga berilgan quyidagi ta'rifni keltirish mumkin.

Ta'rif. *Noma'lum son qatnashgan tenglik tenglama deyiladi.*

$$x + 4 = 7;\ x - 5 = 9;\ 12 - x = 6{,}27;\ x = 9;\ x : 8 = 7\ \dots .$$

Tenglama deb qaralayotgan tengliklarda noma'lum sonlar $x, y, z \dots$ harflar bilan belgilanadi. Tenglamani yechish degan so'z uning hamma ildizlarini topish demakdir, boshqacha aytganda, noma'lumning tenglamani chap qismini uning o'ng qismiga teng qiladigan qiymatni topish ***tenglamani yechish*** deb ataladi.

Masalan, $x + 4=7$ tenglama, $x = 3$ soni uning ildizidir, chunki tenglamaning ildizigina berilgan tenglikni to'g'ri tenglikka aylantira oladi.

Ta'rif. *Nomalum sonning topilgan qiymati berilgan tenglamaning yechimi yoki ildizi deyiladi.*

Bundan ko'rinadiki, noma'lumli tenglamaning ikkala qismini son jihatidan teng qiladigan qiymati tenglamaning ildizi yoki yechimi bo'lar ekan. Demak, $x=3$ yechim bo'lgani uchun $3+4=7$ bo'ladi. IV sinf o'quvchilariga bir noma'lumli tenglamalarni yechish uchun quyidagi qoida o'rgatiladi:

1. Agar berilgan tenglamada noma'lum son kamayuvchi bo'lsa, u quyidagi qoidaga ko'ra topiladi. Noma'lum kamayuvchini topish uchun ayriluvchi bilan ayirmani qo'shish kerak. Umumiy holda $x - b = c$ bo'lsa, $x=b+c$ bo'ladi.

2. Agar berilgan tenglamada noma'lum son ayiriluvchi bo'lsa, u quyidagi qoidaga ko'ra topiladi. Noma'lum ayiriluvchini topish uchun kamayuvchidan ayirmani ayirish kerak. Umumiy holda: $a - x = c$ bo'lsa, $x = a - c$ bo'ladi.

3. Agar berilgan tenglamada noma'lum son ko'payuvchilardan biri bo'lsa, u quyidagi qoidaga ko'ra topiladi. Nomalum ko'payuvchini topish uchun ko'paytmani ma'lum ko'payuvchiga bo'lish kerak. Umumiy holda: $a \cdot x = c$ bo'lsa. $x=c:a$ bo'ladi.

4. Agar berilgan tenglamada noma'lum son bo'luvchi bo'lsa, u holda u quyidagi qoidaga ko'ra topiladi. Noma'lum bo'luvchini topish uchun bo'linuvchini bo'linmaga bo'lish kerak. Umumiy holda $a : x = c$ bo'lsa, $x = a : c$ bo'ladi.

5. Agar berilgan tenglamada noma'lum son bo'linuvchi bo'lsa, u quyidagi qoidaga ko'ra topiladi. Noma'lum bo'linuvchini topish uchun bo'linmaga bo'luvchini ko'paytirish kerak. Umumiy holda $x : a = c$ bo'lsa, $x = a \cdot c$ bo'ladi.

6. V sinf matematika kursida manfiy sonlarni ayirish mavzusi o'tiladi, bunda berilgan yig'indi va qo'shiluvchilardan biriga ko'ra ikkinchi qo'shiluvchi topiladi. Masalan, $x+(-5)=12$ tenglik berilgan bo'lsin. x ni topish uchun tenglikning har ikki qismiga 5 sonni qo'shamiz, $x+(-5)+5=12+5$, $x=17$. Bundagi 17 soni 12 va -5 sonlarining ayirmasidir, ya'ni $12-(-5)=12+5=17$. Javobning to'g'riligini qo'shish amali orqali tekshiriladi: $17+(-5)=12$. Agar $x+(-5)=12$ tenglikka IV sinfdagi berilgan tenglama ta'rifini qo'llasak, $x+(-5)=12$ tenglik tenglama bo'lib hisoblanadi. Bu yerdagi $x=17$ soni esa $x+(-5)=12$ tenglamaning ildizi bo'ladi. Yuqoridagi yechish bosqichlariga ko'ra $x+a=0$ yoki $-x+a=0$ ko'rinishdagi tenglamalarni yechish qoidasini chiqarish mumkin. $x+a=b$ yoki $-x+a=b$ ko'rinishdagi har qanday tenglamani yechish uchun ularning chap va o'ng qismlariga birgina $-a$ sonini qo'shish kifoya: $(x+a=b) \Rightarrow [x+a-a=b-a) \Rightarrow (x=b-a)$;

$$(-x+a=b) \Rightarrow (-x+a-a=b-a) \Rightarrow (-x=b-a) \Rightarrow (x=a-b).$$

Misollar:

1) $y + 9 = -5;$

$y + 9 + (-9) = 5 + (-9)$

$y + 9 - 9 = -5 - 9;$

$y = -14.$

2) $x - 3 = -17,$

$x - 3 + 3 = -17 + 3;$

$x = -14.$

3) $4 - (2,8 - x) = 1,5.$

$4 - 1,5 = 2,8 - x;$

$-2,8 + 2,5 = 2,8 - 2,8 - x;$

$- x = -0,3 \Rightarrow x = 0,3.$

Tekshirish:

$4 - (2,8 - 0,3) = 1,5$

$1,5 = 1,5.$

Shu misollardan keyin tenglama tuzishga olib keladigan masalalarni yechish foydali bo'ladi.

1- masala. Savatda bir necha qo'ziqorin bor edi. Unga yana 27 ta qo'ziqorin solinganidan keyin qo'ziqorinlar 75 ta bo'ldi. Savatda nechta qo'ziqorin bo'lgan?

Yechish. Savatdagi bor qo'ziqorinlar soni x bilan belgilanadi. U holda shartga muvofiq $x+27=75$ tenglamani tuzamiz.

Tenglamani yechish uchun bunday mulohaza yuritiladi: tenglikdagi noma'lum qo'shiluvchini topish uchun yig'indidan ma'lum qo'shiluvchini ayirish kifoya, ya'ni $x=75-27=48$ (ta). Tenglama yechimini to'g'ri yoki noto'g'ri ekanligini bilish uchun tuzilgan tenglamadagi noma'lum x o'rniga 48 sonini qo'yib, uni hisoblaymiz. Agar tenglamaning chap qismida ham 75 chiqsa u to'g'ri yechilgan bo'ladi. $48+27=75$, $75=75$. Demak, yechim to'g'ri ekan.

Matematika fanida tenglik tushunchasi taqqoslash tushunchasi orqali quyidagicha tushuntiriladi: o'rganilayotgan matematik obyektdagi narsalarning o'zaro o'xshash va farqli tomonlarini fijo'mrak aniqlash taqqoslash deyiladi. Ana shu o'rganilayotgan narsalarning o'xshash yoki farqli tomonlarini taqqoslagganda bir xil son qiymatiga ega bo'lsa, u holda bu narsalar son jihatidan teng deb qaraladi, u tenglik (=) ishorasi bilan belgilanadi. Agar a va b sonlar o'zaro teng bo'lsa, u $a=b$ kabi agar ular teng bo'lmasa, $a \neq b$ kabi belgilanadi.

Masalan, $3=3$, $7+1=8$, $9-6=3$. ... . Shuningdek, $8 \neq 9$, $3+5 \neq 4$, ... kabi yoziladi.

Matematika kursida tengliklar ikki xil bo'ladi, ayniyat va tenglama.

Ta'rif. *Tarkibidagi noma'lum sonlarning yo'l qo'yiladigan har qanday qiymatlarida ikkala qismi bir xil son qiymatlarini qabul qiladigan tenglik ayniyat deyiladi.*

Masalan,

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1);$$

$$\frac{x^3-y^3}{x-y}=x^2+xy+y^2, \qquad \frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{x+1}\cdot\frac{1}{x-1}.$$

1) $x^2-1=(x-1)\cdot(x+1)$ tenglikni olaylik, x ning ixtiyoriy qiymatlarida tenglikning chap tomoni o'ng tomoniga teng chiqadi.

Masalan,

$x = 2$ bo'lsin, 2^2-1=(2-1) (2+1), bundan 3 = 3

$x = 5$ bo'lsin, 5^2-1=(5−1)(5 + 1), bundan 24 = 24

2) $\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{x+1}\cdot\frac{1}{x-1}$ tenglikni olaylik, bunda eng avvalo bu tenglikdagi noma'lumlarning yo'l qo'yiladigan qiymatlarini aniqlash lozim. Bu tenglikda $x\neq\pm1$ bo'lishi kerak, aks holda kasrning maxraji nolga teng bo'lib, u ma'noga ega bo'lmay qoladi. Shuning uchun berilgan harflarning yo'l qo'yiladigan qiymatlariga quyidagicha ta'rif berilgan.

Ta'rif. *Tenglik tarkibiga kiruvchi harflarning shu tenglikning o'ng va chap qismi ma'noga ega bo'ladigan qiymatlari bu harflarning yo'l qo'yiladigan qiymatlari deyiladi.* Yuqoridagi tenglamada yo'l qo'yiladigan qiymatlar $x \neq \pm 1$ lardan boshqa barcha haqiqiy sonlardir. Masalan,

agar $x = 2$ bo'lsa, $\frac{1}{2^2-1}=\frac{1}{2+1}\cdot\frac{1}{2-1}$, $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{3}$,

agar $x = 3$ bo'lsa, $\frac{1}{3^2-1}=\frac{1}{3+1}\cdot\frac{1}{3-1}$, $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$.

Endi matematika kursida shunday tengliklar ham borki, ularning ikkala qismi harfning bir xil yo'l qo'yiladigan qiymatlarida turli son qiymatlarini qabul qiladi. Masalan: $x+5=7$, $2x-7=8$.

Bu ko'rinishdagi tengliklarni tenglamalar deb ataladi, tenglama biror berilgan tenglikning ikkala qismi noma'lum harfning yo'l qo'yiladigan qiymatlarida bir xil son qiymatlar qabul qilishini aniqlash masalasini o'rganuvchi tenglik bo'lib hisoblanadi. V sinfda $4x=2x+16$ ko'rinishdagi tenglamani yechish o'rganiladi. Bunday tenglamalarni yechish uchun tenglikning har ikkala tomoniga $-2x$ ifoda qo'shiladi. $4x+(-2x)=2x+(-2x)+16$, $4x-2x=2x-2x+16$. Bu ifodaning tengligini quyidagicha tushuntirish mumkin. Tarozining har ikkala pallasidan o'zaro teng bo'lgan miqdordagi narsalar olib tashlanadi, u holda $2x=16$ tenglik hosil bo'ladi, bundan $x=8$ soni kelib chiqadi, $x=8$ soni $4x=2x+16$ tenglamaning yechimi yoki ildizi bo'ladi.

Bir noma'lumga nisbatan ikki tenglamadan birining har bir ildizi ikkinchi tenglamaning ham ildizi bo'lsa, ikkinchi tenglamaning har bir ildizi esa shu bilan birga birinchi tenglamaning ham ildizi bo'lsa, bu ikki tenglama *teng kuchli (ekvivalent) tenglamalar* deyiladi. Masalan, $2x+5=7$ va $x-1=0$ tenglamalar teng kuchli tenglamalardir, chunki ularning ikkalasining ham ildizi $x=1$ sonidan iboratdir. Bundan tashqari, ildizlari mavjud bo'lmagan tenglamalar ham teng kuchlidir. Masalan, $x^2=-3$ va $x^2+2=-5$ va hokazo. Teng kuchli tenglamalarning quyidagi xossalarini o'quvchilarga tushuntirish maqsadga muvofiqdir.

1-xossa. Agar tenglamaning ikkala qismi noldan farqli biror songa ko'paytirilsa yoki bo'linsa, berilgan tenglamaga teng kuchli tenglama hosil bo'ladi.

Masalan, $15x-5=25$, bu tenglamaning har ikki tomonini 5 soniga bo'lsak, $3x-1=5$ tenglama hosil bo'ladi, bu tenglama oldingi tenglamaga teng kuchli bo'lgan tenglamadir.

Masalan: $12x-7=2x+13$. $12x-2x=13+7$, $10x=20$, $x=2$.

2-§. Chiziqli tenglamalar

Maktab matematika kursida chiziqli tenglama tushunchasini kiritish abstrakt-deduktiv usul orqali amalga oshiriladi, chunki bu tenglama uchun avvalo ta'rif beriladi, so'ngra tenglamaning umumiy ko'rinishi va uni yechish usullari hamda grafigi o'rganiladi.

Ta'rif. *Agar tenglamaning chap va o'ng qismlari, noma'lum o'zgaruvchiga nisbatan chiziqli funksiyalardan iborat bo'lsa, bunday tenglama chiziqli tenglama deyiladi.*

Chiziqli tenglama umumiy holda $ax+b=cx+d$ ko'rinishda ifodalanadi. Bunda a, b, c, d — berilgan ma'lum sonlar, x esa noma'lum son. Bu ko'rinishdagi tenglamalarni yechish quyidagicha amalga oshiriladi:

$$ax+b=cx+d. \ (1), \quad ax-cx=d-b, \quad x(a-c)=d-b, \quad x=\frac{d-b}{a-c}. \qquad (2)$$

1. Agar $a\neq c$ bo'lsa, (1) tenglama (2) ko'rinishdagi bitta yechimga ega bo'ladi.

2. Agar $a-c=0$. $d-b\neq 0$ bo'lsa, (1) tenglama $0\cdot x=d-b$ ko'rinnshni oladi, bunday tenglama x ning hech bir qiymatida o'rinli bo'lmaydi. Demak, bu holda tenglama yechimga ega emas.

3. Agar $a-c=0$ va $d-b=0$ bo'lsa, (1) tenglama $0\cdot x=0$ ko'rinishni oladi, bu tenglik x ning barcha qiymatlarida o'rinli, shuning uchun

(1) tenglama cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi. Boshqacha aytganda, har qanday son uning yechimi bo‘laveradi.

1- misol. $a+x=a^2x-1$ tenglamani x ga nisbatan yeching.

Yechish. $a+1=a^2x-x$, $a+1=x(a^2-1)$; $a+1=x(a-1)\cdot(a+1)$.

1. Agar $a \neq +1$ bo‘lsa, tenglama $x=\dfrac{1}{a-1}$ yechimga ega.

2. Agar $a=1$ bo‘lsa, tenglama $0\cdot x = 1$ ko‘rinishni oladi, bu holda u yechimga ega emas.

3. Agar $a=-1$ bo‘lsa, tenglama $-2x=1$, $x=-\dfrac{1}{2}$ ko‘rinishni oladi, bu holda u tenglama yechimga ega.

2- misol. $3-ax=x-b$ tenglamani x ga nisbatan yeching.

3- misol. $ax-b=1+x$ tenglamani x ga nisbatan yeching.

3-§. Parametrik usulda berilgan kasr-ratsional tenglamalarni yechish

Parametrik usuldagi tenglamalarni yechish degan so‘z tenglamada qatnashayotgan parametrlarning yo‘l qo‘yiladigan barcha qiymatlariga mos keluvchi ildizlarni topish demakdir.

Misol. $\dfrac{5}{ax-4}=\dfrac{1}{9x-a}$ tenglamani yeching.

Bu tenglama ma’noga ega bo‘lishi uchun $ax-4\neq0$ va $9x-a\neq0$ bo‘lishi kerak. Tenglamaning har ikkala tomonini $(ax-4)\cdot(9x-a)$ ga ko‘paytirilsa $45x-ax=5a-4$ tenglama hosil bo‘ladi, bundan:

$$45x-ax=5a-4,\ x(45-a)=5a-4. \qquad (1)$$

Endi a ning qanday qiymatlarida $9x-a=0$ ga $ax-4=0$ tengliklar o‘rinli bo‘lishi topiladi $x=\dfrac{a}{9}$ va $x=\dfrac{4}{a}$, $a\neq 0$. Bu qiymatlarni (1) tenglamaga qo‘yilsa, a ga nisbatan kvadrat tenglama hosil bo‘ladi:

1) $\dfrac{a}{9}(45-a)=5a-4.$

$45a-a^2=45a-36,$

$a^2=36,\quad a=\pm 6.$

2) $\dfrac{4}{a}(45-a)=5a-4.$

$180-4a=5a^2-4a,$

$a^2=36,\quad a=\pm 6.$

Agar parametr $a=\pm6$ qiymatni qabul qilsa, berilgan tenglama maxraji nolga teng bo‘lib, u ma’noga ega bo‘lmaydi, shu sababli $(45-a)\,x=5a-4$. (1) tenglama berilgan tenglamaga teng kuchli bo‘lganligi uchun, $a\neq\pm6$ shartga ko'ra, bu tenglamani quyidagicha yechamiz:

1. a) Agar 45 − $a \neq 0$ bo'lsa, $a \neq 45$ bo'ladi. Bu holda (1) tenglama bitta yechimga ega bo'ladi.

b) Agar $45-a=0$ bo'lsa, (1) tenglama $0 \cdot x=221$ bo'ladi, bu holda tenglama yechimga ega emas. *Javobi:* $x = \frac{5a-4}{45-a}$, $a \neq 45$ va $a=\pm 6$.

2. Agar $a = 45$ bo'lsa, tenglama yechimga ega emas.

3. Agar $a=\pm 6$ bo'lsa, tenglama ma'noga ega bo'lmaydi.

2-misol. $\frac{1}{2n+nx} + \frac{1}{x^2-2x} = \frac{2(n+3)}{x^3-4x}$ tenglamani yeching.

Javobi: 1) agar $n=-4$ bo'lsa, $x=8$; 2) agar $n=-2$ bo'lsa, $x=4$; 3) agar $n=-1$ bo'lsa, $x=1$; 4) agar $n=1$ bo'lsa, $x=3$.

3-misol. $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-b} = 1 + \frac{1}{b}$ tenglamani yeching.

Javobi: $x_1 = b + 1$, $x_2 = \frac{2b}{b+1}$, $b \neq 0$, $b \neq 1$.

Agar $b=-1$ bo'lsa, $x=0$. Agar $b=1$ bo'lsa, $x=2$.

4-§. Noma'lum absolut miqdor belgisi ostida qatnashgan tenglamalarni yechish metodikasi

Absolut miqdor ta'rifiga ko'ra x sonining absolut miqdori quyidagicha aniqlanadi:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{agar } x > 0 \text{ bo'lsa,} \\ -x, & \text{agar } x < 0 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

Masalan, $|5| = 5$, $|-2| = 2$; ...

Ta'rif. *Agar tenglamadagi noma'lum soni absolut qiymati belgisi bilan kelsa, bunday tenglama absolut miqdor belgisi ostidagi tenglama deyiladi.*

Masalan, $|3x - 1| = 4$. $|2x - 1| = |5x - 7|$, $|5x - 7| = 13$.

Bu ko'rinishdagi tenglamalarni quyidagi usullar bilan yechiladi.

1-misol. $|5x - 7| = 13$.

Yechish. ***I usul.***

1) $5x-7=13$, 2) $5x-7=-13$,

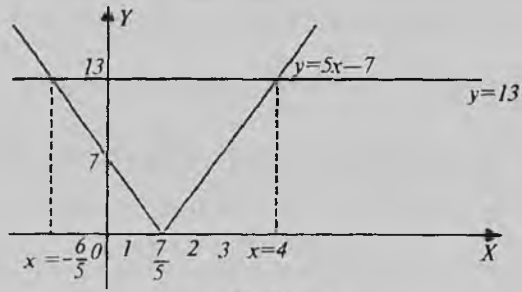
$5x = 13 + 7$, $5x = -13 + 7$,

$5x = 20,$ $\qquad\qquad$ $5x = -6,$

$x = 4,$ $\qquad\qquad$ $x = -\frac{6}{5} = -1\frac{1}{5}.$

Tekshirish. 20−7=13, 13=13. Demak, x=4, x=−6/5 sonlari berilgan tenglamaning ildizlari bo'ladi.

II usul. (Grafik usuli): y=5x−7 funksiya grafigi chiziladi, ularning kesishish



21-chizma.

X	0	1	2	3	4	5	6	-1	-2	-3	-4
Y	7	2	3	8	13	18	23	12	17	22	27

nuqtasining absissasi berilgan tenglamaning yechimi bo'ladi (21-chizma).

Buning uchun y=|5x—7| funksiyaning grafigi yasaladi. Bu grafikning x o'qidan yuqorida yotgan qismini o'zgarishsiz qoldiramiz. Uning uchun 5x—7>0, shu sababli |5x—7|=5x—7 bo'ladi. Bu grafikning absissalar o'qidan pastga yetgan qismiga shu o'qqa nisbatan simmetrik akslantiramiz. Bu holda 5x—7<0 bo'ladi, ya'ni |5x−7|=−(5x−7). Natijada y=5x—7 funksiya grafigi y=13 chiziq bilan ikki nuqtada kesishadi, kesishish nuqtalarning absissalari x=4 va $x = -1\frac{1}{5}$ nuqtalardan iborat bo'ladi, ana shu nuqtalar |5x—7|=13 tenglamaning yechimi bo'ladi.

III usul. (oraliqlar metodi). Absolut miqdor belgisi ostidagi |5x—7| ifoda $x = \frac{7}{5}$da nolga aylanadi. Sonlar to'g'ri chizig'ida $x = \frac{7}{5}$ nuqtani belgilab, bu nuqtadan chapda $\left(-\infty; \frac{7}{5}\right)$ va o'ngda $\left(\frac{7}{5}; \infty\right)$ olingan qiymatlarga ko'ra |5x—7| ifodani absolut miqdor belgisiz quyidagicha yozish mumkin:

$$|5x-7|=\begin{cases} -5x+7, \text{ birinchi } \left(-\infty; \frac{7}{5}\right) \text{ oraliqda,} \\ 5x-7, \text{ ikkinchi } \left(\frac{7}{5}; \infty\right) \text{ oraliqda.} \end{cases}$$

Bularga ko'ra tenglamani quyidagi ikki ko'rinishda yozish mumkin:

1) $-5x + 7 = 13,$
$-5x = 13 - 7,$
$-5x = 6,$
$$x = -\frac{6}{5} = -1\frac{1}{5},$$

2) $5x - 7 = 13,$
$5x = 13 + 7,$
$5x = 20,$
$$x = 4.$$

2-misol. $|7x - 1| = 21 - 9x.$

Yechish.

1) $7x - 1 = 21 - 9x,$
$7x + 9x = 21 + 1,$
$16x = 22,$
$$x = \frac{22}{16} = \frac{11}{8}, \quad x = 1\frac{3}{8}.$$

2) $7x - 1 = -(21 - 9x),$
$7x - 1 = 9x - 21$
$9x - 7x = 21 - 1,$
$$2x = 20, \quad x = 10.$$

Tekshirish.

$$7 \cdot \frac{11}{8} - 1 = 21 - 9\frac{11}{8}, \frac{77-8}{8} = \frac{168-99}{8}.$$

Demak, $x = \frac{11}{8}$ soni berilgan tenglama yechimi ekan.

3-misol. $|x-1|+|x+1|=2$ tenglamani yeching. Bu tenglamada $x-1=0$ va $x+1=0$, demak, ular $x=1$ va $x=-1$ yechimlarga ega bo'ladi. Sonlar to'g'ri chizig'ida $x=1$ va $x=-1$ nuqtalar belgilanadi, bu holda sonlar to'g'ri chizig'i uchta oraliqqa ajraladi. Birinchi oraliq $(-\infty, -1)$, ikkinchi oraliq $[-1,1]$, uchinchi oraliq $(1,\infty)$ dan iboratdir. $|x-1|$ va $|x+1|$ ifodalarning har birini hosil qilingan oraliqlarda absolut miqdor belgisiz quyidagicha yozish mumkin:

1) agar $x \le -1$ bo'lsa, $|x-1|+|x+1|=2$ tenglama $-x+1-x-1=2$ bo'ladi, bundan $-2x=2$ yoki $x=-1$ yechimga ega bo'lamiz;

2) agar $-1 \le x \le 1$ bo'lsa, $|x-1|+|x+1|=2$ tenglama $-x+1+x+1=2$ bo'ladi, bundan $2x=2$ yoki $x=1$ bo'ladi. Demak, $x=-1$ va $x=1$ yechimlarga ega bo'ladi.

4-misol. $2x^2-5x-3|x-2|=0$ tenglamani yeching.

1) agar $x<2$ bo'lsa, $2x^2-5x-3|x-2|$ tenglama $2x^2-5x+3x-6=0$ yoki $x^2-x-3=0$ ko'rinishni oladi, uni yechdi $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+3} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$.

ya'ni $x_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ va $x_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$ yechimlar hosil qilinadi.

Bunda: $x_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ yechim qaralayotgan sohada yetmaydi, shuning

uchun $x_2 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$, $(-\infty, 2)$ oraliq uchun yechim bo'ladi;

2) agar $x \geq 2$ bo'lsa, berilgan tenglamadan $2x^2-5x-3x+6=0$ hosil bo'ladi yoki ushbu $x^2-4x+3=0$ ko'rinishni oladi, uni yechsak, $x_1=1$ va $x_2=3$ yechimlarga ega bo'linadi. Bundagi $x_1=1$ yechim qaralayotgan oraliqda yotmaydi, shuning uchun $(2,\infty)$ oraliq uchun yechim $x_2=3$ bo'ladi. Demak,

$2x^2-5x-3|x-2|=0$ tenglamaning yechimi $x_1 = 1 - \frac{\sqrt{13}}{2}$, $x_2 = 3$ bo'ladi.

5-§. Kvadrat tenglama tushunchasini kiritish metodikasi

Kvadrat tenglama tushunchasi VII sinfda o'tiladi. Bu mavzu materialini o'tishdan bir necha kun oldin o'qituvchi qo'shimcha vazifa sifatida o'quvchilarga kvadrat uchhaddan to'la kvadrat ajratish mavzusini o'rganib kelishlarini vazifa qilib berilishi kerak:

$$y = ax^2 + bx = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b_2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Misol. $$x^2 + 4x - 3 = 2\left(x^2 + 2x - \frac{3}{2}\right) = 2\left(x^2 + 2x + 1 - \frac{3}{2} - 1\right) =$$

$$= 2((x+1)^2 - \frac{5}{2}) = 2(x+1)^2 - 5.$$

Kvadrat uchhaddan to'la kvadrat ajratishni tushuntirilganidan so'ng kvadrat tenglama tushunchasini abstrakt-deduktiv usul orqali kiritiladi.

Ta'rif. *$ax^2+bx+c=0$ (1) ko'rinishdagi tenglama kvadrat tenglama deyiladi, bunda a, b, c berilgan sonlar, $a\neq 0$, x noma'lum sondir.*

Bu tenglamaning ildizlarini topish uchun tenglikning chap tomonida turgan kvadrat uchhaddan to'la kvadrat ajratiladi, ya'ni

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0 \text{ yoki } \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}. \qquad (2)$$

(2) tenglama (1) tenglamaga teng kuchli tenglamadir. (2) haqiqiy yechimga ega bo'lishi uchun $\frac{b^2-4ac}{4a^2}\geq 0$ bo'lishi kerak. Bundagi b^2-4ac (1) ning diskriminanti deyiladi va u $D=b^2-4ac$ kabi belgilanadi.

1) Agar diskriminant $D=b^2-4ac>0$ bo'lsa, (1) tenglama ikkita haqiqiy har xil yechimga ega bo'ladi. Bu yechimni (2) tenglamadan topa olamiz:

$$x_{1,2}=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}; \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

2) Agar diskriminant $D=b^2-4ac<0$ bo'lsa, (1) tenglama haqiqiy sonlar to'plamida yechimga ega emas.

3) Agar diskriminant $D=b^2-4ac=0$ bo'lca, (1) bitta haqiqiy yechimga ega bo'ladi: $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$.

Maktab matematika kursida to'la kvadrat tenglama koeffitsiyentlariga ma'lum shartlar qo'yish orqali chala kvadrat tenglamalar hosil qilinadi.

Agar (1) $b=0$ va $c=0$ bo'lsa, $ax^2+bx+c=0$ tenglama $ax^2=0$ ko'rinishni oladi, uning yechimi $x=0$ bo'lgan $x_1=x_2=0$ bo'ladi. Agar $b=0$ bo'lsa, $ax^2+bx+c=0$ tenglama $ax^2+c=0$ ko'rinishni oladi, uni yechilsa, $x^2=-\frac{c}{a}$ bo'ladi, agar $\frac{c}{a}<0$ bo'lsa, $-\frac{c}{a}>0$ bo'ladi, bunda $ax^2+c=0$ tenglama haqiqiy sonlar to'plamida yechimga ega bo'ladi, ya'ni $x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{c}{a}}$. Agar $\frac{c}{a}>0$ bo'lsa, $ax^2+c=0$ tenglama haqiqiy sonlar to'plamida yechimga ega emas.

4) Agar $c=0$ bo‘lsa, $ax^2+bx+c=0$ tenglama $ax^2+bx=0$ ko‘rinishni oladi, uni yechilsa

$$(ax^2+bx)=0 \Rightarrow x(ax+b)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\frac{b}{a} \end{cases}$$ yechimlari hosil qilinadi.

$ax^2+bx+c=0$ ko‘rinishdagi tenglama ildizlarini yana quyidagi usul bilan ham hisoblash mumkin. Berilgan tenglamani $ax^2+bx=-c$ ko‘rinishda ifodalab, uning har ikkala tomonini $4a$ ga ko‘paytiriladi, natijada $4a^2x^2+4abx=-4ac$ tenglik hosil bo‘ladi. Hosil bo‘lgan tenglikning har ikki tomoniga b^2 ni qo‘shiladi: $4a^2c^2+4abx+b^2=b^2-4ac$ bundan: $(2ax+b)^2=b^2-4ac$.

Agar $D=b^2-4ac\geq 0$ bo‘lsa, bu tenglikning har ikki tomonidan arifmetik kvadrat ildiz chiqarish mumkin:

$$(2ax+b)=\sqrt{b^2-4ac}.$$

Bunda ikki hol bo‘lish mumkin:

1) agar $2ax+b<0$ bo‘lsa, $-(2ax+b)=\sqrt{b^2-4ac}$, $x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2}$;

2) agar $2ax+b>0$ bo‘lsa, $2ax+b=\sqrt{b^2-4ac}$, $x_2=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Shunday qilib, diskriminant $D=b^2-4ac>0$ bo‘lsa, tenglama ikkita haqiqiy har xil yechimga ega bo‘ladi.

Kvadrat tenglama ildizlarini uning diskriminantiga ko‘ra tekshirishni quyidagi jadval orqali tushuntirilsa, o‘quvchilarning mantiqiy fikrlash qobiliyatlari ortadi:

$D=b^2-4ac>0$	Agar $c>0$ bo‘lsa,	$b<0$ bo‘lsa, ikkala ildiz musbat, $b>0$ bo‘lsa, ikkala ildiz manfiy.
	$c<0$ bo‘lsa, ikkala ildiz har xil bo‘ladi	$b<0$ bo‘lsa, ikkala ildiz musbat, $b>0$ bo‘lsa, ikkala ildiz manfiy.
	$c=\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-\frac{b}{a}, \end{cases}$	$b>0$ bo‘lsa, ildizlardan biri nolga teng, ikkinchisi esa manfiybo‘ladi, $b<0$ bo‘lsa, ildizlardan biri nolga teng, ikkinchisi esa musbat bo‘ladi.
$D=b^2-4ac=0$		$b>0$ bo‘lsa, ikkala ildiz manfiy bo‘ladi $b<0$ bo‘lsa, ikkala ildiz musbat bo‘ladi.

Agar $ax^2+bx+c=0$ tenglamada $a=1$ bo'lsa, hosil bo'lgan $ax^2+bx+c=0$ tenglama keltirilgan kvadrat tenglama deyiladi. Har qanday to'la kvadrat tenglamaning har ikkala tomonini a ga bo'lish orqali uni keltirilgan kvadrat tenglama ko'rinishiga keltirish mumkin; $ax^2+bx+c=0$ bo'lsa, $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$, agar $\frac{b}{a}=p$, $\frac{c}{a}=q$ desak, u holda $x^2+px+q=0$ tenglama keltirilgan kvadrat tenglamaning umumiy ko'rinishi bo'ladi.

Bu tenglamaning yechimi $x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ formula bilan ifodalanadi.

Misollar: 1) $3x^2-5x+2=0$, $a=3$, $b=-5$, $c=2$. To'la kvadrat tenglama yechimi formulasiga ko'ra

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{5\pm\sqrt{25-4\cdot3\cdot2}}{6}=\frac{5\pm1}{6},$$

$$x_1=-\frac{5+1}{6}=\frac{6}{6}=1,\quad x_2=\frac{5-1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\ \text{bo'ladi.}$$

2) $3x^2-5x+2=0$ tenglamaning har ikki tomoni 3 ga bo'linsa, $x^2-\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}=0$ bo'ladi. Bu tenglamaning ildizlarini keltirilgan kvadrat tenglama formulasidan foydalanib topiladi:

$$p=-\frac{5}{3},\qquad q=+\frac{2}{3}.$$

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=-\left(-\frac{5}{6}\right)\pm\sqrt{\frac{25}{36}-\frac{2}{3}}=\frac{5}{6}\pm\sqrt{\frac{25-24}{36}}=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}.$$

$$x_1=-\frac{5+1}{6}=\frac{6}{6}=1,\quad x_2=\frac{5-1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

6-§. Viyet teoremasi

Viyet teoremasi ham matematik tushunchalarni kiritishning konkret induktiv usuli orqali kiritiladi, chunki bu teoremani bayon qilishdan oldin teorema xulosasiga olib keladigan quyidagi ko'rinishdagi tushuntirish ishlari bilan shug'ullaniladi. Agar $x^2+px+q=0$ keltirilgan kvadrat tenglama diskriminanti manfiy bo'lmasa, uning ildizlari

$$x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \text{ va } x_2=-\frac{p}{q}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \text{ bo‘lar edi.}$$

Bu x_1 va x_2 yechimlarni o‘zaro qo‘shilsa,

$$x_1+x_2=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=-p, \text{ ko‘paytirilsa}$$

$$x_1\cdot x_2=\left(\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)\cdot\left(\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)=\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)^2\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q=q$$

tengliklar hosil bo‘ladi. Bularga ko‘ra teoremani quyidagicha ifodalash mumkin.

Teorema. *Agar keltirilgan kvadrat tenglama haqiqiy ildizlarga ega bo‘lsa, bu ildizlarning yig‘indisi qarama-qarshi ishora bilan olingan x oldidagi koeffitsiyentga, ularning ko‘paytmasi esa shu tenglamaning ozod hadiga teng bo‘ladi.*

Misol. $x^2-3x+2=0$ tenglamani Viyet teoremasi asosida tekshiring.

Yechish. $D=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-2}=\sqrt{\frac{9}{4}-2}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}>0$

shuning uchun $\begin{cases} x_1+x_2=3 \\ x_1\cdot x_2=2 \end{cases}$ bo‘ladi. Agar berilgan tenglama yechilsa,

$x_{1,2}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-2}=\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}$, bundan $x_1=2$, $x_2=1$ ekani topiladi. Demak, $x_1+x_2=2+1=3$, $x_1\cdot x_2=2\cdot 1=2$.

Bundan tashqari, bu sistema yechilsa, noma’lumlarning biriga nisbatan berilgan tenglama hosil bo‘ladi:

$$\begin{cases} x_1x_2+x_2^2=3x_2 \\ x_1\cdot x_2=2 \end{cases} \Rightarrow \left(x_2^2=3x_2-2\right)\Rightarrow x_2^2-3x_2+2=0.$$

Shuningdek x_1 noma’lumga nisbatan yechish ham mumkin.

7-§. Kvadrat tenglamaga keltirib yechiladigan tenglamalar

1. $ax^4+bx^2+c=0$ (1) tenglama bikvadrat tenglama deyiladi. Bunda a, b va c berilgan sonlar bo'lib, $a\neq 0$ dir. Agar (1) da $x^2=z$ desak, $az^2+bz+c=0$ (2) ko'rinishdagi kvadrat tenglama hosil bo'ladi. Bu tenglama z ga nisbatan yechiladi: $z_1 = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ va $z_2 = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Agar $z_1>0$ va $z_2>0$ ($a>0$, $c>0$, $b^2-4ac\geq 0$, $b<0$ yoki $a<0$, $c<0$, $b^2-4ac\geq 0$, $b>0$) bo'lsa, (1) ko'rinishdagi kvadrat tenglama quyidagi ko'rinishdagi to'rtta yechimga ega bo'ladi:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}, \qquad x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

1- misol. $x^4-3x^2-4=0$ tenglamani yeching.

Agar $x_2=z$ deb belgilansa, tenglama $z^2-3z-4=0$ ko'rinishni oladi. Bu tenglamaning yechimi $z_1=4$ va $z_2=-1$ bo'lib $x_{1,2}=\pm 2$ bo'ladi, $x_{3,4}= = \pm\sqrt{-1}$ yechimi esa haqiqiy sonlar to'plamida mavjud emas.

2- misol. $2x^4-5x^2+3=0$. $a=2$, $b=-5$, $c=3$.

Yechish. Agar $x^2=z$ desak, berilgan tenglama $2z^2-5z+3=0$ ko'rinishni oladi. Bunda $D=b^2-4ac=25-24=1>0$:

$$z_{1,2} = \frac{5\pm 1}{4},\ z_1 = \frac{3}{2},\quad z_2 = 1. \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{z} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}; \qquad x_{1,2} = \pm\sqrt{1} = \pm 1.$$

Yechimni formulalardan foydalanib topish mumkin:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{5-\sqrt{25-4\cdot 3\cdot 2}}{4}} = \pm\sqrt{\frac{5-1}{4}} = \pm\sqrt{\frac{4}{4}} = \pm 1;$$

$$x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{5-\sqrt{25-4\cdot 3\cdot 2}}{4}} = \pm\sqrt{\frac{5+1}{4}} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Maktab matematika kursida o'zaro teskari noma'lum ifodalarni o'z ichiga olgan tenglamalar ham kvadrat tenglamaga keltirib yechiladi. Fikrimizning dalili sifatida quyidagi tenglamani yechaylik:

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^2-\left(\frac{x+1}{x}\right)^2=\frac{3}{2}.$$

Bu ko'rinishdagi tenglamalarni yechish jarayonida o'qituvchi eng avvalo noma'lum o'zgaruvchining yo'l qo'yiladigan qiymatlari sohasini aniqlash lozimligini o'quvchilarga tushuntirishi kerak. Bu tenglamadagi o'zgaruvchining yo'l qo'yiladigan qiymatlari sohasi $x\neq -1$ va $x\neq 0$. Agar $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2=z$ desak, $\left(\frac{x+1}{x}\right)^2=\frac{1}{z}$ bo'lib, z o'zgaruvchiga ko'ra berilgan tenglama $z-\frac{1}{z}=\frac{3}{2}$ yoki $2z^2-3z-2=0$ ko'rinishni oladi. Bu tenglamadan: $z_1=-\frac{1}{2}$, $z_2=2$.

1) $z_1=-\frac{1}{2}$ bo'lganda $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2=-\frac{1}{2}$ bo'ladi, bundan $\frac{x}{x+1}=\pm\sqrt{-\frac{1}{2}}$ tenglama hosil bo'ladi. Bu tenglama haqiqiy sonlar to'plamida yechimga ega emas.

2) $z=2$ bo'lganda $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2=2$ bo'ladi, bundan yoki $\frac{x}{x+1}=\pm\sqrt{2}$ tenglamalar hosil bo'ladi.

a) $$\left(\frac{x}{x+1}=\sqrt{2}\right)\Rightarrow\left(x=\sqrt{2}x+\sqrt{2}\right)\Rightarrow\left(x-\sqrt{2}x=\sqrt{2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[x(1-\sqrt{2})=\sqrt{2}\right]\Rightarrow\left(x=\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right)\Rightarrow\left(x=\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(x=\frac{\sqrt{2}+2}{1-2}\right)\Rightarrow\left(x_1=-2-\sqrt{2}\right).$$

b) $$\left(\frac{x}{x+1}=-\sqrt{2}\right)\Rightarrow\left(x=-\sqrt{2}x-\sqrt{2}\right)\Rightarrow\left(x+\sqrt{2}x=-\sqrt{2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[x\left(1+\sqrt{2}\right)=-\sqrt{2}\right]\Rightarrow\left(x=\frac{-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)\Rightarrow x=\left(\frac{(1-\sqrt{2})(-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(x=\frac{-\sqrt{2}+2}{1-2}\right)\Rightarrow\left(x_2=\sqrt{2}-2\right).$$

Javobi: $x_1=-2-\sqrt{2},\quad x_2=\sqrt{2}-2.$

3. To'rtinchi darajali $ax^4+bx^3+cx^2+dx+c=0$ ko'rinishdagi tenglamalarni ham to'la kvadrat ajratish yo'li bilan kvadrat tenglama ko'rinishiga keltirib yechiladi.

Misol. $x^4+6x^3+9x^2-4x^2+12x+3=0$ tenglamani yeching.

Yechish. $x^4+6x^3+9x^2-4x^2+12x+3=(x^2+3x)^2-4(x^2+3x)+3=0$

$x^2+3x=z$ desak, tenglama $z^2-4z+3=0$ ko'rinishni oladi. Bundan $z_1=1$ va $z_2=3$.

1) $z_1=1$ bo'lganda $x^2+3x=1$ yoki $x^2+3x-1=0$ bo'ladi.

$$x_{1,2}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+1}=-\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{13}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}.$$

2) $z_2=3$ bo'lganda $x^2+3x=3$ yoki $x^2+3x-3=0$ bo'ladi.

$$x_{3,4}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+3}=-\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{21}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}.$$

Javobi: $x_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$; va $x_{3,4}=\dfrac{-3\pm\sqrt{21}}{2}$.

4. Agar $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a$ tenglamada koeffitsiyentlarning $a_n=a_0$, $a_{n-1}=a_1$, $a_{n-2}=a_2$, ... tengliklari o'rinli bo'lsa, bunday tenglama qaytma tenglama deyiladi. Qaytma tenglamalar ham ayniy almashtirishlar bajarish orqali kvadrat tenglama ko'rinishiga keltirib yechiladi.

Misol. $2x^4+3x^3-16x^2+3x+2=0$ tenglamani yeching.

Yechish. Berilgan tenglamaning har ikkala tomoni $x^2\neq0$ ga bo'linadi:

$$2x^2+3x-16+\frac{3}{x}\pm\frac{2}{x^2}=0 \quad \text{yoki} \quad 2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-16=0.$$

Agar $x+\dfrac{1}{x}=z$ desak, $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=z^2$ bo'ladi, bunda: $x^2+\dfrac{1}{x^2}=z^2-2$. Bu belgilashlarga asosan berilgan tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$2(z^2-2)+3z-16=0 \quad \text{yoki} \quad 2z^2+3z-20=0,$$

bundan

$$z_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+4\cdot2\cdot20}}{4}=\frac{-3\pm13}{4},\ z_1=\frac{5}{2},\ z_2=-4.$$

1) Agar $z_1=\frac{5}{2}$ bo'lsa, $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$ yoki $2x^2+5x+2=0$, bundan

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{-5\pm3}{4},\quad x_1=2,\ x_2=\frac{1}{2};$$

2) agar $z_2=-4$ bo'lsa, $x+\frac{1}{x}=-4$ yoki $x^2+4x+1=0$ bo'ladi, bundan

$x_1=-2+\sqrt{3}$ va $x_2=-2-\sqrt{3}$. *Javobi:* $x_1=2$, $x_2=\frac{1}{2}$, $x_{3,4}=-2\pm\sqrt{3}$.

5. $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ ($a\neq0$, $b\neq0$) ko'rinishdagi tenglama ham qaytma tenglama ko'rinishiga keltirib yechiladi. Berilgan tenglamani $x^2\neq0$ ga bo'linsa, $a\left(x^2+\frac{e}{ax^2}\right)+b\left(x+\frac{d}{bx}\right)+c=0$ bo'ladi. Agar $x+\frac{d}{bx}=t$ desak, $\left(x+\frac{d}{bx}\right)^2=t^2$ bo'ladi, bundan $x^2+\frac{d^2}{b^2x^2}=t^2-\frac{2d}{b}$, agar $\frac{e}{d}=\frac{d^2}{b^2}$ bo'lsa,

$x^2+\frac{e}{dx^2}=x^2+\frac{d^2}{b^2x^2}=t^2-\frac{2d}{b}$ yoki $at^2+bt+c-\frac{2ad}{b}=0$ ko'rinishdagi kvadrat tenglama hosil bo'ladi. Demak, $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ tenglamada $\frac{e}{d}=\frac{d^2}{b^2}$ tenglik bajarilsa, bu tenglama ham qaytma tenglama kabi kvadrat tenglamaga keltirib yechilar ekan.

Misol. $2x^4-21x^3+74x^2-105x+50=0$.

Yechish. $a=2$, $e=50$, $d=105$, $b=21$. Shartga ko'ra $\frac{e}{d}=\frac{d^2}{b^2}$ bo'lishi kerak edi, shuning uchun $\frac{50}{2}=\left(\frac{105}{21}\right)^2$ yoki $25=25$ tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglikning har ikkala tomonini $x^2\neq0$ ga bo'lsak,

$$2x^2-21x+74-\frac{105}{x}+\frac{50}{x^2}=0. \qquad 2\left(x^2+\frac{25}{x^2}\right)-21\left(x+\frac{5}{x}\right)+74=0.$$

Agar $x+\frac{5}{x}=t$ desak, $x^2+\frac{25}{x^2}=t^2-10$ tenglik hosil bo'ladi, u holda tenglama $2t^2-21t+54=0$ ko'rinishni oladi.

Bundan $t_1=\frac{9}{2}$ va $t_2=6$ yechimlar hosil bo'ladi.

1) Agar $t_1=\frac{9}{2}$ bo'lsa, $x+\frac{5}{x}=\frac{9}{2}$ yoki $2x^2-9x+10=0$ bundan $x_1=2$ va $x_2=\frac{5}{2}$ yechimlar topiladi.

2) agar $t_2=6$ bo'lsa, $x+\frac{5}{x}=6$ yoki $x^2-6x+5=0$, bundan $x_3=1$ va $x_4=5$ yechimlar topiladi. *Javobi.* $x_1=2$, $x_2=\frac{5}{2}$, $x_3=1$, $x_4=5$.

6. $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=m$ ko'rinishdagi tenglama ham ma'lum bir shart va ayniy almashtirishlarni bajarish orqali kvadrat tenglama ko'rinishiga keltirib yechiladi. Agar bu berilgan tenglamada $a+b=c+d$ yoki $a+c=b+d$ yoki $a+d=b+c$ tengliklar o'rinli bo'lsa, bu tenglama ham kvadrat tenglama ko'rinishiga keltirib yechiladi.

Misol. $(x+2)(x-3)(x+1)(x+6)=-96$.

$a=2$, $b=-3$, $c=1$, $d=6$. Shartga ko'ra $a+c=b+d$ edi, shuning uchun $2+1=-3+6$, bunga ko'ra berilgan tenglama quyidagicha guruhlanadi: $[(x+2)(x+1)][(x-3)[x+6)]=-96$, $(x^2+3x+2)(x^2+3x-18)=-96$, $x^2+3x=t$ desak, $(t+2)\cdot(t-18)=-96$ tenglik o'rinli bo'ladi, bundan tenglama hosil bo'ladi. Bu tenglamaning yechimi $t_1=6$ va $t_2=10$ bo'ladi.

1) agar $t_1=6$ bo'lsa, $x^2+3x=6$ yoki $x^2+3x-6=0$, bundan

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+24}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{33}}{2};$$

2) agar $t_2=10$ bo'lsa, $x^2+3x=10$ yoki $x^2+3x-10=0$ bo'ladi.

$$x_{3,4}=\frac{-3\pm\sqrt{9+40}}{2}=\frac{-3\pm7}{2}, \quad x_3=-5,\ x_4=2.$$

$$\textit{Javobi: } x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{33}}{2},\quad x_3=-5,\quad x_4=2.$$

7. $(x+a)^4+(x+b)^4=c$ ko'rinishdagi tenglama ham $x=t-\frac{a-b}{2}$ almashtirish orqali bikvadrat tenglama ko'rinishiga keltirib yechiladi.

Agar $\begin{cases} x+a=t+m \\ x+b=t-m \end{cases}$ desak, bu sistemadagi tenglamalarni o'zaro hadma-had ayirsak, $a-b=2m$, $m=\frac{a-b}{2}$ bo'ladi, u holda $x+a=t+\frac{a-b}{2}$ yoki $x=t-\frac{a+b}{2}$ bo'ladi. U holda berilgan tenglama quyidagi ko'rinishni oladi: $\left(t+\frac{a-b}{2}\right)^4+\left(t-\frac{a-b}{2}\right)^4=c.$

Bundan:

$$t^4+4t^3\frac{a-b}{2}+6t^2\frac{(a-b)^2}{4}+4t\frac{(a-b)^3}{8}+\frac{(a-b)^4}{16}+$$

$$+t^4-4t^3+\frac{a-b}{2}+6t^2\frac{(a-b)^2}{4}-4t\frac{(a-b)^3}{8}+\frac{(a-b)^4}{16}=$$

$$=2t^4+12t^2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2+2\frac{(a-b)^4}{2}=c.$$

$$t^4+6t^2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^4=\frac{c}{2}.$$

Bu tenglamani bikvadrat tenglamani yechish usuli bo'yicha yecha olamiz. Masalan, $(x+6)^4+(x+4)^4=82$ tenglama berilgan bo'lsin.

Bu tenglamada $x=t-\frac{6+4}{2}=t-5$ almashtirish bajariladi, u holda berilgan tenglama ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$(t+1)^4+(t-1)^4=82.$

$t^4+4t^3+6t^2+4t+1+t^4-4t^3+6t^2-4t+1=82,$

$2t^4+12t^2+2=82, \quad t^4+6t^2-40=0.$

$t^2=y$ desak, $y^2+6y-40=0, \quad y_1=4, \quad y_2=-10.$

1) agar $t^2=4$ bo'lsa, $t_{1,2}=\pm 2$;

2) agar $t^2=-10$ bo'lsa, haqiqiy sonlar to'plamida yechim mavjud emas.

$$x_1=t-5=2-5=-3, \quad x_2=t-5=-2-5=-7.$$

8. Agar tenglama $\frac{ax}{px^2+nx+q}+\frac{bx}{px^2+mx+q}=c$ ko'rinishda berilgan bo'lsa, unda $px+\frac{q}{x}=t$ almashtirish bajariladi. Agar tenglamada $c=0$ bo'lsa, $x_1=0$ bo'lib qolgan yechimlarni x o'zgaruvchiga nisbatan kvadrat tenglamaga keltirib topiladi. Agar $c\neq 0$ bo'lsa, $x\neq 0$ bo'lib, bu holda berilgan tenglamaning surat va maxraji x ga bo'linadi:

$$\frac{a}{px+n+\frac{q}{x}}+\frac{b}{px+m+\frac{q}{x}}=c.$$

Bunda $px+\frac{q}{x}=t$ desak, t o'zgaruvchiga nisbatan kvadrat tenglama hosil bo'ladi: $\frac{a}{t+n}+\frac{b}{t+m}=c.$ Bunda $t\neq -n$, $t\neq -m$ dir. Bularga ko'ra tenglamaning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$ct^2+(mc+nc-a-b)t+mnc-am-bn=0.$$

Misol. $\frac{2x}{2x^2-5x+3}+\frac{13x}{2x^2+x+3}=6$ tenglamani yeching.

Yechish. Tenglamaning chap tomonida turgan qo'shiluvchilarning surat va maxrajlari x ga bo'linsa, $\frac{2}{2x-5+\frac{3}{x}}+\frac{13}{2x+1+\frac{3}{x}}=6$ tenglik hosil bo'ladi. $2x+\frac{3}{x}=t$ desak, $\frac{2}{t-5}+\frac{13}{t+1}=6$ tenglik hosil bo'ladi, (bunda $t\neq 5$ va $t\neq -1$ bo'lishi kerak):

$$2t^2-13t+11=0, \text{ bundan } t_1=1, \quad t_2=\frac{11}{2}.$$

1) agar $t_1=1$ bo'lsa, $2x+\frac{3}{x}=1$ yoki $2x^2-x+3=0$ bo'lib, uning yechimlari haqiqiy sonlar to'plamida mavjud emas.

2) agar $t_2=\frac{11}{2}$ bo'lsa, $2x+\frac{3}{x}=\frac{11}{2}$ yoki $4x^2-11x+6=0$ bo'ladi, bundan $x_1=\frac{3}{4}$ va $x_2=2$ yechimlar topiladi.

Javobi: $x_1=\frac{3}{4}$, $x_2=2$.

8-§. Irratsional tenglamalarni yechish

Irratsional son tushunchasi maktab matematika kursining VIII sinfida o'tiladi. O'quv qo'llanmasida irratsional tenglamaga ta'rif berilib, uni yechish usullari ko'rsatilgan. O'quv qo'llanmasidagi ta'rif quyidagicha ifodalanadi.

Ta'rif. *«Noma'lumlari ildiz ishorasi ostida bo'lgan tenglamalar irratsional tenglamalar deyiladi».*

Bu ta'rifni kengroq ma'noda quyidagicha ham berish mumkin. *«Noma'lumlari ildiz ishorasi ostida yoki kasr ko'rsatkichli daraja belgisi ostida bo'lgan tenglama irratsional tenglama deyiladi».*

Masalan, $\sqrt{4-5x}=6$ $\quad x^{\frac{1}{2}}-7=0$

$\sqrt{2x+8}+\sqrt{x+5}=7,\quad \sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}}=x-1$

$\sqrt[3]{x-a}+\sqrt[3]{x-b}$ va hokazo.

Maktab matematika kursida faqatgina kvadrat ildizlarni o'z ichiga olgan irratsional tenglamalarni yechish o'rgatiladi. Shuning uchun ham bu mavzu materialini o'tish jarayonida o'qituvchi o'quvchilarga sonning kvadrat ildizi va uning arifmetik ildizi degan tushunchalarni takrorlab tushuntirish lozim, chunki biz maktab algebra kursida faqat manfiy bo'lmagan sonlardan ildiz chiqarishni o'rgatamiz. $\sqrt{-3},\sqrt{-7},\sqrt{-36},...$ lar haqiqiy sonlar maydonida ma'noga ega emas. Biz musbat sonning kvadrat ildizi deganda uning arifmetik ildizini, ya'ni uning musbat qiymatlarini tushunamiz. Masalan, $\sqrt{9}=\pm3$ bo'ladi, ammo -3 soni arifmetik ildiz bo'la olmaydi, 3 soni esa 9 sonning arifmetik ildizidir.

Irratsional tenglamaning yechishdan avval uning aniqlanish sohasini topish lozim.

1-misol. $\sqrt{3x-6}+\sqrt{1+x}=2$ tenglamaning aniqlanish sohasini toping.

Yechish. $3x-6\geq 0$ va $1+x\geq 0$ bu tengsizliklardan: $x\geq 2$ va $x\geq -1$. Demak, bu tenglamaning aniqlanish sohasi $x\geq 2$ bo'ladi. Haqiqatan ham, bu tenglama yechilsa, uning ildizi 2 ga teng yoki undan katta son chiqishi uning aniqlanish sohasidan ko'rinadi.

2-misol. $\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}=\sqrt{x+2}$ tenglamaning aniqlanish sohasini toping. $x-1\geq 0$, $3-x\geq 0$, $x+2\geq 0$ bu tengsizliklardan $x\geq 1$, $x\leq 3$, $x\geq -2$. Bularga ko'ra tenglamaning aniqlanish sohasi $1\leq x\leq 3$ bo'ladi, bu degan so'z tenglama ildizi 1 soni bilan 3 soni orasida bo'ladi, deganidir.

Irratsional tenglamalar ayniy shakl almashtirishlar orqali ratsional tenglama ko'rinishiga keltiriladi. Irratsional tenglamalarni yechish uchun eng ko'p ishlatiladigan shakl almashtirish berilgan tenglikning har ikkala tomonini bir xil darajaga ko'tarish va $\sqrt{f(x)}\cdot\sqrt{g(x)}=\sqrt{f(x)g(x)}$,

$\dfrac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{g(x)}}=\sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}}$ kabi usullardir. Bunday shakl almashtirishlarni bajarish jarayonida yechilayotgan tenglama uchun chet ildiz hosil bo'lishi mumkin, chunki bu ayniy tengliklarning o'ng tomonlarining aniqlanish sohasi chapga qaraganda kengroqdir.

Teorema. *Agar $f(x)=g(x)$ (1) tenglamaning har ikkala qismini kvadratga ko'tarilsa, berilgan tenglama uchun chet ildiz hosil bo'ladi, bu chet ildiz $f(x)=-g(x)$ tenglamaning ildizidir.*

Isboti. Agar (1) tenglamaning har ikkala tomoni kvadratga ko'tarilsa, $[f(x)]^2=[g(x)]^2$ yoki $[f(x)]^2-[g(x)]^2=0$. Bu degan so'z $[f(x)-[g(x)][f(x)+g(x)]=0$ deganidir. Bunda quyidagi ikki hol bo'lishi mumkin: 1) agar $f(x)-g(x)=0$ bo'lsa, $f(x)+g(x)\neq 0$ u holda $f(x)=g(x)$ bo'ladi; 2) agar $f(x)+g(x)=0$ bo'lsa, $f(x)-g(x)\neq 0$ u holda $f(x)=-g(x)$ bo'ladi. Demak, hosil bo'ladigan chet ildiz yoki $[f(x)]^2-[g(x)]^2=0$. tenglamaning ildizi bo'ladi.

Misol. $4x=7$ tenglama berilgan bo'lsin. Bu tenglamaning har ikkala tomonini kvadratga ko'tarilsa, $16x^2=49$ bo'ladi. Bundan $(16x^2-49=0)=>$ $=>(4x-7)(4x+7)=0$.

1) agar $4x-7=0$ bo'lsa, $4x+7\neq 0$ bundan $x=\dfrac{7}{4}=1\dfrac{3}{4}$;

2) agar $4x+7=0$ bo'lsa, $4x-7\neq 0$ bundan $x=-\dfrac{7}{4}=-1\dfrac{3}{4}$.

Bunda $x=-1\frac{3}{4}$ chet ildizdir, haqiqatda ham $4\cdot\left(-\frac{7}{4}\right)=7$ bundan $-7=7$, bu $x=-1\frac{3}{4}$ yechim tenglamani qanoatlantirmaydi deganidir. Bu chet ildiz $4x=7$ tenglamaning har ikkala tomonini kvadratga ko'tarish natijasida hosil bo'ladi. Maktab matematika kursida irratsional tenglamalarni yechish quyidagi ikki usul orqali amalga oshiriladi:

1) irratsional tenglamaning har ikkala tomonini bir xil darajaga ko'tarish;

2) yangi o'zgaruvchilar kiritish usuli.

Irratsional tenglamalarning ikkala tomonini bir xil darajaga ko'tarish usuli quyidagi ketma-ketlik asosida amalga oshiriladi:

a) berilgan irratsional tenglama $\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{g(x)}$ ko'rinishga keltiriladi;

b) bu tenglamaning ikkala tomoni n darajaga ko'tariladi;

d) hosil bo'lgan $f(x)=g(x)$ ratsional tenglama hosil bo'ladi;

e) natijada $f(x)=g(x)$ ratsional tenglama yechiladi va tekshirish orqali chet ildiz aniqlanadi.

1-misol. $\sqrt{3x+4}=x$ tenglamani yeching.

Yechish. Tenglamaning aniqlanish sohasini topiladi: $x\geq 0$ va $3x+4\geq 0$, bundan $x\geq -\frac{4}{3}$.

I usul. Har ikkala tomonini kvadratga ko'tarsak. $[(\sqrt{3x+4})^2=x^2]=>$ $=>\left(3x+4=x^2\right)$. Bundan $x^2-3x-4=0$ tenglamani hosil qilamiz. Uning yechimlari $x_1=4$ va $x_2=-1$, $x_2=-1$ yechim $\sqrt{3x+4}=x$ tenglama uchun chet ildizdir, chunki u tenglamani qanoatlantirmaydi.

II usul. $[(\sqrt{3x+4})^2=x^2]$ $=>$ $(3x+4=x^2)$ $=>$.

$$=>\{[x^2-(3x+4)]=0\}=>(x-\sqrt{3x+4})(x+\sqrt{3x+4})=0.$$

1) Agar $x-\sqrt{3x+4}=0$ bo'lsa, $x+\sqrt{3x+4}\neq 0$ bo'ladi, bundan $x=\sqrt{3x+4}$ berilgan tenglama hosil bo'ladi, buning yechimi $x=4$ bo'ladi.

2) Agar $x+\sqrt{3x+4}=0$ bo'lsa, $x-\sqrt{3x+4}\neq 0$ bo'ladi, $x=-\sqrt{3x+4}$ bundan bo'ladi, buning yechimi $x=-1$ dir.

Demak, $\sqrt{3x+4}=x$ tenglamaning har ikkala tomonini kvadratga ko'tarish natijasida $x=-1$ chet ildiz hosil bo'ladi, $x=4$ esa uning haqiqiy yechimi bo'ladi.

Irratsional tenglamalarni yangi o'zgaruvchilar kiritish usuli bilan ham yechiladi.

2-misol. $\sqrt[5]{(x-5)^2}-\sqrt[5]{x-5}=6$ tenglamani yeching.

Yechish. Bu tenglamaning aniqlanish sohasi $(-\infty, \infty)$. Agar $\sqrt[5]{x-5}=y$ deb belgilasak, tenglama $y^2-y-6=0$ ko'rinishga keladi. Bu tenglama $y_1=3$ va $y_2=-2$ yechimlarga ega. Bunga ko'ra $x-5=243$; $x=248$. $\sqrt[5]{x-5}=-2$ tenglama aniqlanish sohasiga tegishli bo'lgan ildizga ega. Demak, $x_1=248$, $x_2=-27$ tenglamaning yechimi bo'lar ekan.

3-misol. $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+20}=8$ tenglamani yeching.

Yechish. 1. Aniqlanish sohasi topiladi. $x+4\geq 0$ va $x+20\geq 0$, bulardan $x\geq -4$ va $x\geq -20$ bo'ladi. Bundan $x\geq -4$ qiymat olinadi.

2. Berilgan tenglamaning har ikkala tomoni kvadratga ko'tariladi:

$$\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+20}\right)^2=8^2,$$

$$x+4+2\sqrt{x+4}\cdot\sqrt{x+20}+x+20=64.$$

$$2x+2\sqrt{x+4}\cdot\sqrt{x+20}=40.$$

$$\left(\sqrt{(x+4)(x+20)}\right)^2=(20-x)^2,$$

$$(x+4)(x+20)=400-40x+x^2$$

$$x^2+24x+80=400-40x+x^2,$$

$$64x=320,\ x=5.$$

Bu tenglamani yana quyidagi usul bilan ham yechish mumkin:

$$(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+20})^2=8^2,\quad [(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+20})^2-8^2)=0]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow[(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+20})-8][(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+20})+8]=0$$

1) $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+20}=8$, buning yechimi $x=5$,

2) $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+20}=-8$, bu tenglama yechimga ega emas.

4-misol. $\sqrt{2x+3}=a$, parametrik ko'rinishdagi irratsional tenglamani yeching. Bu yerda tenglamaning aniqlanish sohasiga nisbatan $a>0$ shartni qo'yish yetarli bo'ladi. $(\sqrt{2x+3})^2=a^2$, $2x+3=a^2$, bundan $2x=a^2-3$ yoki $x=\dfrac{a^2-3}{2}$ yechim hosil bo'ladi.

T e k s h i r i s h. $\sqrt{2\dfrac{a^2-3}{2}+3}=a,\ \sqrt{a^2}=a,\ a=a.$

5-misol. $\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2-10x+25}=10$ irratsional tenglamani yeching.

Y e c h i s h. Bu tenglamani $\sqrt{(x+2)^2}+\sqrt{(x-5)^2}=10$ yoki $|x+2|+|x-5|=10$ ko'rinishga keltirib, so'ngra yechiladi.

a) agar $x<-2$ bo'lsa, $-x-2-x+5=10$, bundan $-2x=7$ yoki $x=-3{,}5$;

b) agar $-2\le x\le 5$ bo'lsa, $x+2-x+5=10$, yoki $7=10$, bu holda tenglama yechimga ega emas;

d) agar $x>5$ bo'lsa, $x+2+x-5=10$, bundan $2x=13$ yoki $x=6{,}5$. $x=-3{,}5$ va $x=6{,}5$.

MUSTAQIL YECHISH UCHUN MISOLLAR

1. $1+\sqrt{2x-2}=x.$ *Javobi:* 3.
2. $\sqrt{4-x}+\sqrt{5+x}=3.$ *Javobi:* $x_1=4;\ x_2=-5.$
3. $\sqrt{2x+1}=2\sqrt{x}-\sqrt{x-3}.$ *Javobi:* $x=4.$
4. $\sqrt{1+x\sqrt{x^2+24}}=x+1.$ *Javobi:* $x_1=0;\ x_2=5.$
5. $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}=\sqrt{2x}.$ *Javobi:* $x_1=-a;\ x_2=a.$
6. $\sqrt{x-3}+\sqrt{x+18}=x.$ *Javobi:* $x=7.$
7. $\sqrt{x+4}+\sqrt{20+x}=8.$ *Javobi:* $x=5.$
8. $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x}.$ *Javobi:* $x=4.$
9. $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4.$ *Javobi:* $x=5.$
10. $\sqrt{15-x}+\sqrt{3-x}=6.$ *Javobi:* $x=-1.$

11. $1+\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}}=x.$ *Javobi:* $x=7.$

12. $\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=2.$ *Javobi:* $x_1=-1;\ x_2=3.$

13. $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=2.$ *Javobi:* $x=0.$

14. $\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1}=1.$ *Javobi:* $x=3.$

9-§. Parametrli irratsional tenglamalarni yechish

1- misol. $\sqrt{x-1}=x-a$ tenglamani yeching.

Yechish. Berilgan tenglama quyidagicha yozib olinadi:

$$x-1-\sqrt{x-1}+1-a=0\cdot \qquad (1)$$

Agar bu tenglamada $\sqrt{x-1}=y$ desak, $x-1=y^2$ bo'ladi, u holda tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$y^2-y+1-a=0, \qquad y_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-(1-a)}=$$

$$=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1-4+4a}{4}}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{4a-3}}{2};$$

$$y_1=\frac{1+\sqrt{4a-3}}{2}; \qquad y_2=\frac{1-\sqrt{4a-3}}{2}.$$

(1) tenglama faqat $a\geq\frac{3}{4}$ bo'lgandagina, yechimga ega bo'ladi, ya'ni

$$\sqrt{x-1}=\frac{1-\sqrt{4a-3}}{2}, \qquad (2)$$

$$\sqrt{x-1}=\frac{1+\sqrt{4a-3}}{2}, \qquad (3)$$

(2) tenglama $1-\sqrt{4a-3}\geq 0$ bo'lganida yechimga ega bo'ladi. (2) va (3) yechilsa, $\frac{3}{4}\leq a\leq 1$ tengsizlik hosil bo'ladi, u holda tenglama quyidagi ko'rinishdagi ikkita haqiqiy har xil yechimga ega bo'ladi:

$$x_1 = \frac{2a+1+\sqrt{4a-3}}{2}; \qquad x_2 = \frac{2a+1-\sqrt{4a-3}}{2}.$$

Agar $a>1$ bo‘lsa, tenglama $x_{1,2} = \frac{2a+1-\sqrt{4a-3}}{2}$ yechimga ega bo‘ladi,

agar $a<\frac{3}{4}$ bo‘lsa, tenglama yechimga ega bo‘lmaydi.

2-misol. $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+2}=a$ tenglamani yeching.

Yechish. Bu tenglamaning aniqlanish sohasi

$$\begin{cases} 3x-2 \geq 0, \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{3}, \\ x \geq -2 \end{cases} \Rightarrow x \geq \frac{2}{3}$$

bo‘ladi, u holda berilgan tenglama $a_1 \geq \frac{2\sqrt{6}}{3}$ bo‘lgandagina yechimga ega

bo‘ladi, agar $a<\frac{2\sqrt{6}}{3}$ bo‘lsa, yechimga ega emas:

$$\sqrt{3x-2} = a-\sqrt{x+2} \qquad (1)$$

$$3x-2 = a^2-2a\sqrt{x+2}+x+2, \qquad 2x-4 = a^2-2a\sqrt{x+2},$$

$$2x+4+2a\sqrt{x+2}-a^2-8=0, \qquad 2(x+2)+2a\sqrt{x+2}-a^2-8=0.$$

agar $\sqrt{x+2}=y$ desak, $2y^2+2ay-a^2-8=0$ yoki $2y^2+2ay-$ $-(a^2+8)=0,$ bundan

$$y_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2+2a^2+16}}{2} = \frac{-a \pm \sqrt{3a^2+16}}{2}; \qquad (2)$$

$$\sqrt{x+2} = \frac{-a-\sqrt{3a^2+16}}{2}; \qquad (3)$$

$$\sqrt{x+2} = \frac{-a+\sqrt{3a^2+16}}{2}; \qquad (4)$$

$a \geq \frac{2\sqrt{6}}{3}$ da (3) tenglama yechimga ega emas, (4) tenglama esa

$x = \frac{2a^2 + 4 - a\sqrt{3a^2 + 16}}{2}$ yechimga ega bo'ladi.

3-misol. $\sqrt{x^2 - ax + 2} = x - 1$ tenglamani yeching.

Yechish: $\begin{cases} x - 1 \geq 0, \\ x^2 - ax + 2 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ (a-2)x = 1. \end{cases}$

Agar $a=2$ bo'lsa, sistema yechimga ega emas, agar $a \neq 2$ bo'lsa $\begin{cases} x \geq 1 \\ x = \frac{1}{a-2} \end{cases}$ hosil bo'ladi, u holda $\frac{1}{a-2} \geq 1$ yoki $2<a\leq3$ bo'ladi.

Javobi. Agar $2<a\leq3$ bo'lsa, $x = \frac{1}{a-2}$, agar $a\leq2$, bo'lsa, $a>3$ tenglama yechimga ega emas.

4-misol. $\sqrt{a - \sqrt{a+x}} = x$ tenglamani yeching.

Yechish. $\begin{cases} x \geq 0, \\ a + x \geq 0, \\ a - \sqrt{a+x} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x \geq -a, \\ a \geq \sqrt{a+x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x \geq -a, \\ a^2 \geq a + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x \geq -a, \\ x \leq a^2 - a. \end{cases}$

Tenglamaning aniqlanish sohasi, agar $a\geq1$ bo'lsa, $0 \leq x \leq a^2 - a$ bo'ladi. $a - \sqrt{a+x} = x^2$ yoki $\sqrt{a+x} = a - x^2$, bu $a - x^2 \geq 0$ tenglama bo'lgandagina yechimga ega, shuning uchun $a + x = a^2 - 2ax^2 + x^4$ yoki $a^2 - (2x^2+1)a + (x^4 - x) = 0$.

$$a_{1,2} = \frac{2x^2 + 1 \pm \sqrt{(2x^2+1)^2 - 4x^2 + 4x}}{2}; \; a_1 = x^2 - x; \;\; a_2 = x^2 + x + 1,$$

$a_1 = x^2 - x$ tenglama $a^2 - x^2 \geq 0$ shart uchun $x = \frac{-1 \pm \sqrt{4a-3}}{2}$.

a) $x>0$, $y>0$, $x>y$ u holda $x+y-\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{(x-y)^2}}-\dfrac{12}{x-y}=0$

yoki $x^2-y^2-\sqrt{x^2-y^2}-12=0$. Endi $\sqrt{x^2-y^2}=t$ desak,

$$t^2-t-12=0; \quad t_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+12}=\frac{1}{2}\pm\frac{7}{2}.$$

$t_1=4$, $t_2=-3$, shuning uchun $\sqrt{x^2-y^2}=4$, bundan $x^2-y^2=16$ bo'ladi. Shuning uchun

$$\begin{cases} x^2-y^2=16, \\ xy=15 \end{cases}$$

ratsional tenglama sistemasi hosil bo'ladi. Bu tenglamani yechilsa, $x=\pm5$, $y=\pm3$ yechimlar hosil qilamiz.

b) $x<0$, $y<0$ va $x<y$ bo'lsa, tenglama quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$x+y-\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{-(x-y)}-\frac{12}{x-y}=0, \qquad x^2-y^2+\sqrt{x^2-y^2}-12=0,$$

$$\sqrt{x^2-y^2}=t,\ t^2+t-12=0, \quad t_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+12}=-\frac{1}{2}\pm\frac{7}{2};\ t_1=3,\ t_2=-4.$$

$$\sqrt{x^2-y^2}=3 \quad \text{yoki} \quad x^2-y^2=9.$$

Natijada

$$\begin{cases} x^2-y^2=9, \\ xy=15 \end{cases}$$

sistema hosil bo'ladi. Bu sistemani yechilsa,

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{981}+9}{2}}, \qquad y_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{981}-9}{2}}$$

yechimlar hosil bo'ladi.

3-misol. Tenglamalar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy}=8\sqrt{2}, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4. \end{cases}$$

Yechish. Sistemadagi ikkinchi tenglamaning har ikkala tomoni kvadratga ko'tariladi: $x + y + 2\sqrt{xy} = 16$ (1) hosil bo'ladi. Sistemadagi birinchi tenglamaning har ikki tomoni $\sqrt{2}$ ga ko'paytiriladi:

$$\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}+2\sqrt{xy}=16 \qquad (2)$$

(2) dan (1) ni ayiramiz:

$$\sqrt{2(x^2+y^2)}-(x+y)=0,$$

$$\sqrt{2(x^2+y^2)}=x+y,$$

$$2(x^2+y^2)=x^2+2xy+y^2,$$

$$x^2-2xy+y^2=0,\ (x-y)^2=0,\ x=y.$$

Sistemadagi ikkinchi tenglamadagi x o'rniga y ni qo'yilsa, $2\sqrt{y}=4$, $\sqrt{y}=2$, bundan $y=4$ bo'ladi. *Javobi:* $x=y=4$.

MUSTAQIL YECHISH UCHUN MISOLLAR

1. Sistemani yeching:

$$\begin{cases} x^2+x\sqrt[3]{xy^2}=208, \\ y^2+y\sqrt[3]{yx^2}=-1053. \end{cases}$$

Javobi: $x_1=8,\ \ y_1=27,\ \ x_2=-8,\ \ y_2=27,$

$x_3=8,\ \ y_3=-27,\ \ x_4=-8,\ \ y_4=-27.$

2. Sistemani yeching:

$$\begin{cases} 8\sqrt{x^2-y^2}=x+9y, \\ x^4+2x^2y+y^2+x=2x^3+2xy+y+506. \end{cases}$$

Javobi: $x_1=5, y_1=3;$

$$x_2=\frac{25-48\sqrt{6}}{29},\ y_2=\frac{21(5-48\sqrt{6})}{29^2}.$$

3. Sistemani yeching:

$$\begin{cases} \dfrac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}+\dfrac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}}=\dfrac{17}{4}, \\ x(x+y)+\sqrt{x^2+xy+4}=52. \end{cases} \quad Javobi: \begin{matrix} x_1=5, & y_1=4; \\ x_2=-5, & y_2=-4; \\ x_3=15, & y_3=-12; \\ x_4=-15, & y_4=12. \end{matrix}$$

4. Sistemani yeching:

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x^2-y^2}}=\dfrac{5+\sqrt{7}}{5-\sqrt{7}} \\ x^3+2y^3=118. \end{cases} \quad Javobi:\ x=4, \quad y=3.$$

11-§. Ko'rsatkichli tenglamalar

Ko'rsatkichli tenglama tushunchasini tushuntirishdan oldin o'qituvchi o'quvchilarga daraja, ko'rsatkichli funksiya va ularning xossalari haqidagi ma'lumotlarni takrorlashi, so'ngra ko'rsatkichli funksiyaning ta'rifini berish lozim.

Ta'rif. Daraja ko'rsatkichida noma'lum miqdor qatnashgan tenglamalar ko'rsatkichli tenglamalar deyiladi. Masalan, $3^x=2^{x-1}$; $5^{x^2-6}-1=0,7^{x-2}-\sqrt[3]{49}$ va hokazo. $a^x=b$ tenglama maktab matematika kursidagi eng sodda ko'rsatkichli tenglamadir. Bunda a va b berilgan musbat sonlar bo'lib, $a\neq1$, $a>0$ bo'lishi kerak. x esa noma'lum miqdordir. $ax=b$ tenglama bitta yechimga ega. Har qanday ko'rsatkichli tenglama ayniy almashtirishlarni bajarish orqali algebraik yoki $a^x=b$ ko'rinishdagi sodda holga keltirib yechimlari topiladi. Ko'rsatkichli tenglamalarning yechish darajasini quyidagi xossalariga asoslanadi:

1. Agar o'zaro ikkita teng darajaning asoslari teng bo'lsa, ularning daraja ko'rsatkichlari ham o'zaro teng bo'ladi.

Masalan, agar $a^m = a^n$ bo'lsa, $m=n$ bo'ladi, albatta bunda $a\neq0$ va $a\neq1$, $a>0$ bo'lishi kerak.

2. Agar o'zaro teng darajaning ko'rsatkichlari teng bo'lsa, u holda ularning asoslari ham teng bo'ladi, ya'ni $a^m=b^m$ bo'lsa, u holda $a = b$ bo'ladi. Maktab matematika kursidagi ko'rsatkichli tenglamalar asoslarini tenglash, kvadrat tenglamaga keltirish, logarifmlash, ya'ni o'zgaruvchini kiritish va guruhlash usullari bilan yechiladi. Bu usullarni quyidagi misollar orqali ko'rib chiqaylik.

1-misol. $36^x = \dfrac{1}{216}$ tenglamani yeching.

Y e c h i s h. Bu tenglama asoslarini tenglash yo'li orqali yechiladi:

$$\left(36^x = 216^{-1}\right), \left(6^{2x} = 6^{-3}\right) \Rightarrow (2x = -3) \Rightarrow \left(x = -\frac{3}{2}\right).$$

Ushbu tenglamani logarifmlash usuli bilan ham yechish mumkin.

Logarifm ta'rifiga ko'ra: $x=\log_{36}\left(\dfrac{1}{216}\right)$ bundan $x=-log_{36}216=\log_6 216=$ $-\dfrac{3}{2}$, chunki $log_6 216=3$.

2-misol. $5^{2x}-5^x-600=0$ tenglamani yeching. Bu tenglama yangi o'zgaruvchi kiritish usuli orqali kvadrat tenglamaga keltirib yechiladi. Agar $y=5^x$ desak, berilgan tenglama $y^2-y-600=0$ ko'rinishni oladi:

$$y_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 600} = \frac{1}{2} \pm \frac{49}{2}; \quad y_1 = 25, \quad y_2 = 24$$

$$5^x = y \text{ yoki } 5^x=25,\ 5^x=52,\ x=2.$$

Javobi: $x = 2$.

3-misol. $3^{x^2+1} + 3^{x^2-1} = 270$ tenglamani yeching.

Y e c h i s h. $3^{x^2} \cdot 3 + 3^{x^2} \cdot \dfrac{1}{3} = 270$, $3^{x^2} = y$ desak, $3y+\dfrac{1}{3}y=270$

yoki $\dfrac{10}{3}y=270$, bundan $y=81$, $3^{x^2} = 81$ yoki $3^{x^2} = 3^4$ bundan $x^2=4$ va $x_1=2$, $x_2=-2$.

4-misol. $5^{2x}-7^x-5^{2x}\cdot 35+7^x\cdot 35=0$ tenglamani yeching. Bu tenglama guruhlash usuli bilan yechiladi:

$$5^{2x}(1-35) = 7^x(1-35), \quad 5^{2x} = 7^x, \quad x=0.$$

5-misol. $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x = 10$ tenglamani yeching.

Y e c h i s h. Bu tenglamani yechishda $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x \cdot \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x = 1$ ekanligidan foydalaniladi. Agar $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x = y$ desak, u holda

$\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x=\frac{1}{y}$ bo'ladi. Bu belgilashlarga ko'ra tenglama quyidagicha ko'rinish oladi. $y+\frac{1}{y}=10$, bundan y^2-$10y+1=0$ yoki $y_1=5-2\sqrt{6}$ va $y_2=5+2\sqrt{6}$ ildizlarga ega bo'lamiz.

a) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x=5-2\sqrt{6}$ bo'lsin, u holda

$$(5+2\sqrt{6})^{\frac{x}{2}}=\frac{(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})}{5+2\sqrt{6}}=(5+2\sqrt{6})^{-1}, \text{bundan} \frac{x}{2}=-1, \; x=-2;$$

b) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x=5+2\sqrt{6}$ bo'lsin,u holda $(5+2\sqrt{6})^{\frac{x}{2}}=(5+2\sqrt{6})^1$,

bundan $\frac{x}{2}=1$, $x=2$;

Javobi: $x=-2$ va $x=2$.

6-misol. $100^x= 300$ tenglamani yeching.

Yechish. Tenglikning ikkala tomonini 10 asosga ko'ra logarifmlanadi. $x lg100=lg300$.

Ma'lumki, lg100=2. Bunda $lg300=lg(100\cdot 3)= lg100+lg3=2+lg3$ kabi ayniy almashtirishlar bajariladi. Bu almashtirishlarga ko'ra berilgan tenglama $x\cdot 2=2+lg3$ ko'rinishni oladi.

Bundan: $x=\frac{2+\lg 3}{2}=1+\frac{\lg 3}{2}$.

7- misol. $\left(2^{3x}-\frac{8}{2^{3x}}\right)-6\left(2^x-\frac{1}{2^{x-1}}\right)=1.$

Yechish. Bu tenglamani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\left(2^{3x}-\frac{8}{2^{3x}}\right)-6\left(2^x-\frac{2}{2^x}\right)-1=0$$

$2^x-\frac{2}{2^x}=y$ deb belgilansa; u holda

$$2^{3x}-\frac{8}{2^{3x}}=\left(2^x-\frac{2}{2^x}\right)\left(2^{2x}+2+\frac{4}{2^{2x}}\right)=$$

$$=\left(2^x-\frac{2}{2^x}\right)\left[\left(2^x-\frac{2}{2^x}\right)^2+6\right]=y(y^2+6)$$

bo'ladi. Bu almashtirishlarga ko'ra berilgan tenglama o'zgaruvchi y ga nisbatan quyidagi ko'rinishni oladi: $y(y^2+6)-6y-1=0$ yoki $y^3=1$, $y=1$. $2^x-\frac{2}{2^x}=1$, bundan $2^{2x}-2^x-2=0$ bo'ladi. Agar $2^x=t$ desak, u holda tenglama $t^2-t-2=0$ ko'rinishni oladi. Uning yechimlari $t_1=2$, $t_2=-1$ bo'ladi. U holda $2^x=2$ yoki $x=1$. $2^x=-1$ tenglama yechimga ega emas.

Javobi: $x=1$.

MUSTAQIL YECHISH UCHUN MISOLLAR

Quyidagi tenglamalarni yeching:

1. $5^{x+1}+3\cdot5^{x-1}-6\cdot5^x+10=0$ — *Javobi:* 2.

2. $\sqrt{27^{x-1}}=\sqrt[3]{9^{2-x}}$. — *Javobi:* $x=\frac{17}{13}$.

3. $16\sqrt{(0,25)^{5-\frac{x}{4}}}=2^{\sqrt{x+1}}$. — *Javobi:* $x=24$.

4. $4+\frac{2}{3^x-1}=\frac{5}{3^{x-1}}$. — *Javobi:* $x=1$.

5. $\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1}+\left(\frac{3}{5}\right)^{1-x}=1,2$. — *Javobi:* $x=0$.

6. $7\cdot2^x=5\cdot3^x$. — *Javobi:* $x=\frac{\lg7-\lg5}{\lg3-\lg2}$.

7. $52^x-7^x-52^x\cdot17+7^x\cdot17=0$. — *Javobi:* $x=0$.

8. $9^x=\left(\frac{1}{243}\right)^{5x}$. — *Javobi:* $x=0$.

9. $(0,4)^{\lg^2 x-1}=(6,25)^{2-\lg^{2} x}$. *Javobi:* $x_1=10^5$, $x_2=10$.

10. $x^{\lg^2 x+\lg x^3+3}=\dfrac{2}{\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}}$. *Javobi:* $x_1=1$, $x_2=\dfrac{1}{100}$.

11. $2\cdot 11^{4(x-1)}-1=121^{x-1}$ *Javobi:* $x=1$.

12. $2\cdot 3^{x+1}-5\cdot 9^{x-2}=81$. *Javobi:* $x_1=4$, $x_2=4-\dfrac{\lg 5}{\lg 3}$.

12-§. Logarifmik tenglamalar

Maktab matematika kursida logarifmik tenglamaga ta'rif berilib, so'ngra uni yechish usullari ko'rsatiladi.

Ta'rif. *Noma'lum miqdor logarifm belgisi ostida qatnashgan tenglamalar logarifmik tenglamalar deyiladi.*

Masalan, $lgx=3-lg5$, $lgx=lg2$, $2lg=lg(15-2x)$ va hokazo. Logarifmik tenglama ham ko'rsatkichli tenglama singari transsendent tenglama turiga kiradi. $log_a x=b$ tenglama eng sodda logarifmik tenglamadir. Bunda a, b lar ma'lum sonlar, x noma'lum sondir. Bu ko'rinishdagi tenglama $x=a^b$ bitta yechimga ega bo'ladi.

Logarifmik tenglamaning yechish jarayonida o'qituvchi o'quvchilarga logarifmik funksiya va uning xossalari haqidagi ma'lumotlarni takrorlab berishi lozim. Ayniqsa, o'qituvchi ko'paytmaning $lg(a\cdot b)=lga+lgb$, kasrning $lg\frac{a}{b}=lga-lgb$ va darajaning $lga^n=nlgb$ logarifmlari hamda logarifmlarning bir asosidan boshqa asosiga o'tish $log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ formulasi va qoidalarini imkoniyat boricha isboti bilan tushuntirib berishi maqsadga muvofiqdir, chunki logarifmik tenglamalarni yechish jarayonida ana shu qoidalardan foydalaniladi. Logarifmik tenglamalarni yechish jarayonida ko'pincha $lgA=lgB$ bo'lsa, $A=B$ bo'ladi degan qoidaga amal qilinadi. Ayrim hollarda o'quvchilar $lgA+lgB=lgC$ tenglikdan ham $A+B=C$ bo'ladi degan noto'g'ri xulosaga keladilar. Mana shunday xatoliklarning oldini olish uchun o'qituvchi yuqoridagi tengliklarni aniq misollar yordamida ko'rsatib berishi lozim. Masalan, $lg5+lg9=lg45$. Bu tenglikdan yuqoridagi xato mulohazaga ko'ra $5+9=45$

bo'lishi kerak, bunda $14 \neq 45$. Bundan ko'rinadiki, $lgA+lgB=lgC$ dan $A+B=C$ deb yozish katta xatolikka olib kelar ekan. Demak, $lgA+lgB=lgC$ bo'lsa, ikki son ko'paytmasining logarifmi qoidasiga ko'ra $lg(A \cdot B)=lgC$ bo'ladi, bundan $A \cdot B=C$ ekanligini ko'rsatish kifoya. $lg5+lg9=lg45$, $lg(5 \cdot 9)=lg45$. $45=45$. $log_a f(x)=log_a g(x)$ tenglamani yechish uchun $f(x)=g(x)$ tenglamani yechish kerak va topilgan yechimlar ichidan $f(x)>0$, $g(x)>0$ tengsizliklarni qanoatlantiradiganlarini tanlab olinadi. $f(x)=g(x)$ tenglamaning qolgan ildizlari esa $log_a f(x)=log_a g(x)$ tenglama uchun chet ildiz bo'ladi. Har qanday logarifmik tenglama ayniy almashtirishlar yordamida uni $log_a f(x)=log_a g(x)$ ko'rinishga keltirib, $f(x)=g(x)$ tenglamani yechish va yangi o'zgaruvchi kiritish orqali yechiladi. Logarifmik tenglamalarni yechishni uning aniqlanish sohasini topishdan boshlash lozim.

1-misol. $log_a x=b$ tenglamani yeching.

Yechish. Agar $a>0$ va $a \neq 1$ bo'lsa, $x=a^b$ bo'ladi.

2-misol. $\frac{\lg 2x}{\lg(4x-15)}=2$ tenglamani yeching.

Yechish. $lg2x$ ning aniqlanish sohasi $x>0$ bo'ladi. $lg(4x-15)$ ning aniqlanish sohasi $4x-15>0$, bundan $x>\frac{15}{4}$ bo'ladi. Bundan tashqari, $4x-15 \neq 0$ yoki $x \neq 4$ bo'lishi kerak, bularga asoslanib tenglamaning aniqlanish sohasi $x>3\frac{3}{4}$ va $x \neq 4$ bo'ladi. Tenglamani yechish uchun quyidagicha ayniy almashtirish bajariladi:

$lg2x=2lg(4x-15)$, $lg2x=lg(4x-15)^2$; $2x=16x^2-120x+225$ yoki $16x^2-122x+225=0$, bundan $x_1=\frac{72}{15}=\frac{9}{2}=4\frac{1}{2}$ yechim tenglamaning aniqlanish sohasida yotadi, shuning uchun $x_1=4\frac{1}{2}$ yechim bo'ladi.

3-misol. $log_2(lgx+2\sqrt{\lg x}+1)-log_2(\sqrt{\lg x}+1)=1$ tenglamani yeching.

Yechish. Bu tenglamadagi o'zgaruvchining qabul qiladigan qiymatlari sohasi $x \geq 1$ bo'ladi. Berilgan tenglama potensirlansa, $\frac{\lg x+2\sqrt{\lg x}+1}{\sqrt{\lg x}+1}=2$ yoki $\sqrt{\lg x}+1=2$, $\sqrt{\lg x}=1$ bundan $x=10$.

4-misol. $x^{1+lgx}=100$ tenglamani yeching.

Yechish. Bu tenglamadagi noma'lumning qabul qiladigan qiymatlar sohasi $x>0$ dir. Tenglikning har ikkala tomoni 10 asosga ko'ra logarifmlanadi: $lgx\cdot(1+lgx)=\lg 100$.

Agar $lgx=t$ desak, $lg100=2$ bo'ladi. U holda $(1+t)t=2$ yoki $t^2+t-2=0$, bundan $t_1=1$, $t_2=-2$. $lgx=1$, bundan $x=10$, $lgx=-2$, bundan $x=\frac{1}{100}$.

Javobi. $x_1=10$, $x_2=\frac{1}{100}$.

5-misol. $\lg\sqrt{5x-4}+\lg\sqrt{x+1}=2+\lg 0,18$ tenglamani yeching.

Yechish. Bu tenglamaning aniqlanish sohasi $5x-4>0$ va $x+1>0$ bo'lishi kerak, bundan $x>\frac{4}{5}$ bo'ladi. Tenglama potensirlansa: $\sqrt{5x-4}\ \sqrt{x+1}=100\ \ 0,18$ yoki $\sqrt{5x-4}\cdot\sqrt{x+1}=18$. Bunda $5x^2+x-328=0$, bundan $x_1=-\frac{41}{5}$ va $x_2=8$, $x_1=-\frac{41}{5}$ bo'lgani uchun yechim bo'lolmaydi. *Javobi.* $x=8$.

6-misol. $\frac{1}{12}\lg^2 x=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\lg x$ tenglamani yeching.

Yechish. Bu tenglamaning aniqlanish sohasi $x>0$. Agar $lgx=y$ desak, $\frac{1}{12}y^2=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}y$, $y^2+3y-4=0$, bundan $y_1=1$ va $y_2=-4$, u holda $lgx=1$ yoki $x=10$. $lgx=-4$ yoki $x=\frac{1}{10^4}$. *Javobi.* $x_1=10$, $x_2=\frac{1}{10^4}$.

7-misol. $log_5x+log_x5=2,5$.

Yechish. Tenglamaning aniqlanish sohasi $x>0$ va $x\neq 1$. Bu tenglamada logarifm asoslarini bir xilga keltirish kerak. Buning uchun $log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$ formuladan foydalaniladi:

$$log_x 5=\frac{\log_5 5}{\log_5 x}=\frac{1}{\log_5 x}.$$

Bu almashtirishlarga ko'ra tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$\log_5 x + \dfrac{1}{\log_5 x} = 2,5,$ agar $log_5 x=y$ desak, yoki $y + \dfrac{1}{y} = 2,5$

$y^2-2,5y+1=0$. Uni yechilsa, $y_1=2$ va $y_2=\dfrac{1}{2}$. Bularga ko'ra $log_5 x=2$, bundan

$x=25$ va $log_5 x=\dfrac{1}{2}$, bundan $x=\sqrt{5}$. *Javobi:* $x_1=25$, $x_2=\sqrt{5}$.

MUSTAQIL YECHISH UCHUN MISOLLAR

Quyidagi tenglamalarni yeching:

1. $lgx=3-lg5$. *Javobi:* $x = 200$.
2. $100^{lg(x+20)} = 10000$. *Javobi:* $x = 80$
3. $lg(0,5 + x) = lg2 - \lg x$. *Javobi:* $x = \dfrac{\sqrt{33}-1}{4}$.
4. $lg(x+6) - 2 = \dfrac{1}{2} lg(2x-3) - \lg 25$. *Javobi:* $x_1 = 14$, $x_2 = 6$.
5. $\dfrac{1}{5-4\lg x} + \dfrac{1}{1+\lg x} = 1$. *Javobi:* $x = \sqrt{10}$.
6. $\dfrac{1}{5-4\lg(x+1)} + \dfrac{4}{1+\lg(x+1)} = 3$. *Javobi:* $x = 9$, $x = \sqrt{1041}$.
7. $x^x = x$. *Javobi:* $x = 1$, $x = -1$.
8. $x^{lgx+2} = 1000$. *Javobi:* $x = \dfrac{1}{1000}$, $x = 10$.
9. $x = 10^{1-0.25\lg x}$. *Javobi:* $\sqrt[5]{10000}$.
10. $log_3 x + log_5 x = log_x 15$. *Javobi:* $x = 5$.
11. $log_{16} x + log_4 x + log_2 x = 7$. *Javobi:* $x = 16$.
12. $\log_{3x} 3 = \log_3 (3x)^2$. *Javobi:* $x = 1$.
13. $\log_{\sqrt{\frac{1}{16}}} x = 4$. *Javobi:* $x=\dfrac{1}{256}$.
14. $\log_{\sqrt{x-2}}(2\sqrt{x}+6) = 2$. *Javobi:* $x = 16$.
15. $\log_3\left(3+\sqrt{3+x}\right) = \dfrac{2}{\log_x 3}$. *Javobi:* $x = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

16. $\sqrt{\log_x \sqrt{2x}} \cdot \log_2 x = -1.$ *Javobi:* $x = \frac{1}{4}$.

17. $\frac{\lg(x+4) - \lg(x-3)}{\lg 200 - \lg 25} = 1.$ *Javobi:* $x = 4$.

18. $\log_b x + \log_{b^2} x + \log_{b^4} x = 1{,}75.$ *Javobi:* $x = b$.

19. $\frac{\lg(2x+5) - \lg x}{2 + \lg 100} = \frac{1}{4}.$ *Javobi:* $x = \frac{5}{8}$.

20. $\log_3\{1 + \log_2[1 + \log_4(1 + \log_{\frac{1}{2}} x)]\} = 0.$ *Javobi:* $x = 1$.

21. $\log_4 x + \log_x 4 = 2.$ *Javobi:* $x = 4$.

22. $\log_{4\sqrt{x}} x + \log_3 x - \log_{\frac{1}{3}} x = 8.$ *Javobi:* 9.

23. $\log_7[x + \log_2(9 - 2^x) + 4] = 1.$ *Javobi:* $x = 0$.

24. $\log_7 \log_4 \log_3^2(x-7) = 0.$ *Javobi:* $x = 7\frac{1}{9}$, $x=16$.

25. $\log_3 x + 6\log_x 3 = 5.$ *Javobi:* $x=9$, $x=27$.

26. $\lg x + \lg(x+3) = \lg 2 + \lg(9-2\sqrt{x^2+3x-6}).$ *Javobi:* $x = 2$.

13-§. Parametrli logarifmik va ko'rsatkichli tenglamalarni yechish

Parametrli logarifmik va ko'rsatkichli tenglamalarni yechish parametrsiz shunday tenglamalardan ana shu parametrni qanoatlantiruvchi tenglama yechimini uning yo'l qo'yiladigan qiymatlari ichidan izlash bilan farq qiladi.

1-misol. $\log_a(a+\sqrt{a+x}) = \frac{2}{\log_x a}$ tenglamani yeching.

Yechish. Bu tenglamani yechish uchun avvalo uning parametrini qanoatlantiruvchi yo'l qo'yiladigan qiymatlar sohani topiladi:

$$x > 0,\ x \neq 1,\ a > 0,\quad a \neq 1.\quad \log_a(a+\sqrt{a+x}) = \log_a x^2.$$

Potensirlash qoidasiga ko'ra $a+\sqrt{a+x} = x^2$ $\sqrt{a+x} = x^2 - a$, bunda $x^2 > a$ tenglikning har ikki tomonini kvadratga ko'tarilsa, $a+x = x^4 - 2ax^2 + a^2$,

$a^2-(2x^2+1)a+(x^4-x)=0$ bu tenglamani yechilsa, $a_{1,2}=\frac{2x^2+1\pm(2x+1)}{2}$

hosil bo'ladi: $a_1=x^2+x+1$ va $a^2=x^2-x$. $a_1=x^2+x+1$ tenglamaning yechimi yo'l qo'yiladigan qiymatlar sohasida yotmaydi, $x^2-a>0$, $x>0$ bo'lgani uchun $a=x^2-x$ tenglama yechiladi: $x^2-x-a=0$, bundan

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+a}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1+4a}{4}}=\frac{1\pm\sqrt{4a+1}}{2}.$$

Bulardan: $x_1=\frac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$, $x_2=\frac{1-\sqrt{4a+1}}{2}$.

Bu yechimlardan $x_1=\frac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$ tenglamaning yo'l qo'yiladigan qiymatlar sohasida yotadi, shuning uchun u yechim bo'ladi.

Bu berilgan tenglamaning logarifm xossalari va potensirlashga ko'ra $a-\sqrt{a+x}=x^2$ ko'rinishda yozib olinadi. Bu tenglamaning har ikki tomoniga x qo'shiladi.

$a+x+\sqrt{a+x}=x^2+x,$

agar $\sqrt{a+x}=b$ desak, $b^2+b=x^2+x$ hosil bo'ladi. Bundan

$$\left(x^2-b^2\right)+(x-b)=0,$$

$$(x-b)(x+b)+(x-b)=0, \qquad (x-b)(x+b+1)=0.$$

$x+b+1\neq0$ bo'lgani uchun $x-b=0$ bo'ladi, b ning o'rniga $\sqrt{a+x}$ ni qo'ysak, $x-\sqrt{a+x}=0$ yoki $x^2-x-a=0$ bo'ladi. Bu tenglamani yechilishni yuqorida ko'rib o'tdik.

2-misol. $a^{\frac{x}{2}}+b^{\frac{x}{2}}=m(ab)^{\frac{1}{x}}$ tenglamani yeching.

Yechish. Bu tenglamadagi o'zgaruvchining yo'l qo'yiladigan qiymati $x\neq0$.

a) $a\cdot b>0$ bo'lsin, u holda tenglamaning ikkala tomonidagi ifodalarni $(a\cdot b)^{\frac{1}{x}}$ ga bo'linadi:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{x}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{x}} = m, \quad (m > 0).$$

Agar $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{x}} = t$ desak, $t + \frac{1}{t} = m$, bundan $t^2 - tm + 1 = 0$ bo'ladi. Bu tenglamani yechamiz:

$$t_{1,2} = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4}}{2}, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4}}{2}. \qquad (1)$$

Bunda $m \geq 2$ bo'ladi.

a) $m > 2$ bo'lsin, bu holda (1) ning har ikki tomonini 10 asosga ko'ra logarifmlanadi:

$$\frac{1}{x}\lg\frac{a}{b} = \lg(m \pm \sqrt{m^2 - 4}) - \lg 2, \quad x = \frac{\lg a - \lg b}{\lg(m \pm \sqrt{m^2 - 4}) - \lg 2}, \quad (a \neq b).$$

b) $m = 2$ bo'lsin, u holda (1) quyidagi ko'rinishni oladi:

bundan: $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{x}} = 1, \quad a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{x}}$; $a = b \neq 0$ bo'lishi kerak.

2) $a \cdot b = 0$ bo'lsin.

a) $a = b = 0$ bo'lsa, berilgan tenglamaning yechimi bo'lgan barcha sonlar.

b) $a = 0$, $b \neq 0$ yoki $a \neq 0$, $b = 0$ bo'lsa, tenglama yechimga ega emas.

Javobi: 1) Agar $m > 2$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq b$ bo'lsa,

$$x = \frac{\lg a - \lg b}{\lg(m \pm \sqrt{m^2 - 4}) - \lg 2}.$$

2) Agar a) $m = 2$, $a = b \neq 0$ bo'lsa, x — ixtiyoriy son.

b) $a = b = 0$, $x \neq 0$ — ixtiyoriy son.

3-misol. $\left(\frac{1 + a^2}{2a}\right)^x + \left(\frac{1 - a^2}{2a}\right)^x = 1$ tenglamani yeching.

Yechish. Bu tenglamadagi a parametrning yo'l qo'yiladigan qiymatlari sohasi $0 < a < 1$ bo'ladi. Tenglamaning har ikki tomoni $\left(\frac{1 + a^2}{2a}\right)^x \neq 0$ ga bo'linadi:

$$\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^x+\left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^x=1,\quad \frac{2a}{1+a^2}=\sin z,\quad \frac{1-a^2}{1+a^2}=\cos z,$$

$$(\cos z)^x+(\sin z)^x=1. \qquad (1)$$

(1) tenglikning chap tomonida turgan ifodaning yo‘l qo‘yiladigan qiymatlar sohasi $0<z<\frac{\pi}{2}$ bo‘ladi, bu oraliqda $f(x)=(sinz)^x+(\cos z)^x$ funksiya monoton kamayuvchidir. $x=2$ da $f(x)=1$ bo‘ladi, shuning uchun $x=2$ bu tenglamaning yechimi bo‘ladi.

4-misol. $a^x-\frac{a^{2x}-4a^x+4}{\sqrt{a^{2x}-4a^x+4}}=1$ tenglamani yeching.

Yechish: Bu tenglama ma’noga ega bo‘lishi uchun $\sqrt{a^{2x}-4a^x+4}=\sqrt{(a^x-2)^2}=|a^x-2|\neq 0$ bo‘lishi kerak.

$$a^x-\frac{(a^x-2)^2}{|a^x-2|}=1;\quad a^x-a^x+2=1.$$

a) agar $a^x\geq 2$ bo‘lsa, $a^x-a^x+2=1$ tenglama yechimga ega emas.

b) agar $0<a^x<2$ bo‘lsa, $2a^x=3$; $x=\log_a\frac{3}{2}$ yechim hosil bo‘ladi.

5-misol. $2\log_x^2 b-3\log_x bx^2+14\log_{b^2x^2} bx=0$ tenglamani yeching.

Yechish. $x>0$, $x\neq\frac{1}{b^2}$ va $b>0$, agar $log_x b=y$ desak, $2y^2-3y+$ $+1=0$, $y_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{4}=\frac{3\pm 1}{4}$; $y_1=1, y_2=\frac{1}{2}$, $\log_x b=1$.

bundan $x_1=b$, $\log_x b=\frac{1}{2}$ bundan $x_2=\sqrt{b}$.

6-misol. $\frac{2}{a}\lg x=1+\frac{a}{\lg x}$, $a\neq 0$ tenglamani yeching.

Yechish.

$$\frac{2}{a}\lg^2 x = \lg x + a; \quad \frac{2}{a}\lg^2 x - \lg x - a = 0;$$

$$\lg x = y; \quad 2y^2 - ay - a^2 = 0,$$

$$y_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 8a^2}}{4} = \frac{a \pm 3a}{4}, \qquad y_1 = a, \ y_2 = -\frac{a}{2};$$

$$\lg x = a, \ x = 10^a; \ \lg x = -\frac{a}{2}, \ x = 10^{-\frac{a}{2}}.$$

MUSTAQIL YECHISH UCHUN MISOLLAR

1-misol. $2\log_x a + \log_{ax} a + 3\log_{a^2x} a \neq 0, \ a \neq 1, \ a > 0$ tenglamani yeching.

Javobi: $x_1 = \frac{1}{\sqrt{a}}, \ x_2 = \frac{1}{a\sqrt[3]{a}}.$

2-misol. $\frac{\log_3 4 - 2}{\log_3(x+2)} = \frac{\log_a(5-x)}{\log_a(x+2)} - 1, \ a > 0, \ a \neq 1$ tenglama yechilsin.

Javobi: $x = 2\frac{11}{13}.$

3-misol. $\frac{\lg(4+a-x)}{\lg x} = 1 + \frac{\log_a 4 - 2}{\log_a x}, \ a > 0, \ a \neq 1$ tenglama yechilsin.

Javobi: $x = \frac{a^2(a+4)}{a^2+4}.$

14-§. Ko'rsatkichli va logarifmik tenglamalar sistemasini yechish

1-misol. $\begin{cases} \sqrt[x]{x+y} = 5, \\ (x+y)\cdot 2^x = 100 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish. Sistemadagi birinchi tenglamaning har ikki tomoni x darajaga ko'tariladi:

$$\begin{cases} x + y = 5^x, \\ (x+y)\cdot 2^x = 100. \end{cases}$$

$$(5^x \cdot 2^x = 100) \Rightarrow (10^x = 10^2) \Rightarrow (x = 2).$$

$(2 + y = 5^2) \Rightarrow y = 25 - 2 = 23.$ *Javobi:* $x = 2,\ y = 23.$

2-misol. $\begin{cases} x^y = 243 \\ \sqrt[y]{1024} = \left(\frac{2}{3}x\right)^2 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish. Sistemadagi ikkinchi tenglamaning har ikki tomoni y darajaga ko'tariladi:

$$\begin{cases} x^y = 243, \\ 1024 = \left(\frac{2}{3}x\right)^{2y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^y = 243, \\ 1024 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2y} \cdot \left(x^y\right)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^y = 243, \\ 1024 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2y} \cdot (243)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^y = 243, \\ 2^{10} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2y} \cdot (3^5)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^y = 243, \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{10} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^y = 243, \\ 2y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^y = 243, \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = 5. \end{cases}$$

3-misol. $\begin{cases} y^{\frac{x}{y}} = x, \\ y^3 = x^2 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish. Sistemadagi birinchi tenglamaning har ikki tomoni $2y$ darajaga, ikkinchi tenglamani esa y darajaga ko'tariladi:

$\begin{cases} y^{2x} = x^{2y} \\ y^{3y} = x^{2y} \end{cases} \Rightarrow y^{2x} = y^{3y};\quad y \neq 1$ bo'lsa, $2x = 3y,\ x = \frac{3}{2}y,$ x ning bu topilgan qiymatini sistemadagi ikkinchi tenglamaga qo'yiladi:

$$\left(y^3=\frac{9}{4}y^2\right)\Rightarrow\left(y^3-\frac{9}{4}y^2=0\right)\Rightarrow y^2\left(y-\frac{9}{4}\right)=0;$$

$$y_{1,2}=0,\quad y_3=\frac{9}{4},\quad x_{1,2}=0,\quad x_3=\frac{27}{8},\quad y_3=\frac{9}{4}.$$

4-misol. $\begin{cases} 9\cdot 5^x+7\cdot 2^{x+y}=457, \\ 6\cdot 5^x-14\cdot 2^{x+y}=-890 \end{cases}$ tenglamali sistemani yeching.

Yechish. $5^x=a$, $2^{x+y}=b$ desak,

$$\begin{cases} 9a+7b=457, \\ 6\cdot a-14b=-890 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=1 \\ b=64, \end{cases}$$

$(5^x=1)=(5^x=5^{\cdot})=(x=0)$; $2^y=64=2^6$; $y=6$. *Javobi:* $x=0$, $y=6$.

MUSTAQIL YECHISH UCHUN MISOLLAR

1. $\begin{cases} 3^{x+y}+3^x+3^y=7, \\ 3^{2x+y}+3^{x+2y}=12. \end{cases}$ *Javobi:* $x_1=0,\ y_1=1,$ $x_2=1,\ y_2=0.$

2. $\begin{cases} 2\cdot 9^x+9^x=5^x\cdot 5^{-y}, \\ 2\cdot 3^{x-y}-5^{y-x}=3\cdot 9^x. \end{cases}$ *Javobi:* $x=-\frac{1}{2},\ y=-\frac{1}{2}.$

3. $\begin{cases} (3x-y)^{x+y}=4, \\ 48^{\frac{1}{x+y}}=7x^2-18xy+3y^2. \end{cases}$ *Javobi:* $x=\frac{5}{4},\ y=-\frac{1}{4}.$

4. $\begin{cases} x\cdot 2^{x-y+1}+3y\cdot 2^{2x+y}=2, \\ 2x\cdot 2^{2x+y}+3y\cdot 8^{x+y}=1. \end{cases}$ *Javobi:* $x=1,\ y=-1.$

5. $\begin{cases} \sqrt[y]{4^x}=32\sqrt[x]{8^y}, \\ \sqrt[y]{3^x}=3\sqrt[x]{9^{1-y}}. \end{cases}$ *Javobi:* $x_1=-2,\ y_1=4,$ $x_2=\frac{3}{2}.\ y_2=\frac{1}{2}.$

6. $\begin{cases} \log_a x+\log_a y=2, \\ \log_b x-\log_b y=4. \end{cases}$ *Javobi:* $x=ab^2\quad y=\frac{a}{b^2}.$

7. $\begin{cases} (1+\log_x y)\log_2 x = 3 \\ \log_{\sqrt{y}}(y^4x^2) - 0{,}5\log_{\sqrt{x}} y^4 = 2. \end{cases}$ *Javobi:* $x_1 = 2,\quad y_1 = 4,$ $x_2 = 2^6,\quad y_2 = -\frac{1}{27}.$

8. $\begin{cases} x \cdot \log_2 \frac{1}{4} \cdot \log_{\frac{1}{x}} 4 = y\sqrt{y}\,(\log_x 4 - 2), \\ \log_y 4 \cdot \log_{\sqrt{2}} x = 2. \end{cases}$ *Javobi:* $x = 2^{\frac{3}{5}},\quad y = 2^{\frac{2}{5}}.$

9. $\begin{cases} \log_2 xy + 4\log_4(x-y) = 5, \\ x^2 + y^2 = 20. \end{cases}$ *Javobi:* $x_1 = 4,\quad y_1 = 2.$ $x_2 = 2,\quad y_2 = 4.$

10. $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2, \\ x^2 - y = 20. \end{cases}$ *Javobi:* $x = 5$, $y = 5$.

11. $\begin{cases} \log_{xy}(x+y) = 0 \\ \log_{xy}(y-x) = 1. \end{cases}$ *Javobi:* $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2},\quad y = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$

12. $\begin{cases} \lg^2 \frac{x}{y} = 3\lg^2 x - \lg^2 y, \\ \lg^2(y-3x) - \lg x \cdot \lg y = 0. \end{cases}$ *Javobi:* $x_1 = 1,\quad y_1 = 4,$ $x_2 = \frac{1}{2},\quad y_2 = 2.$

13. $\begin{cases} \sqrt[10]{2^x} \cdot \sqrt{\sqrt[5]{2^y}} = \sqrt[x]{128}, \\ \lg(x+y) = \lg 40 - \lg(x-y). \end{cases}$ *Javobi:* $x = 7$, $y = 3$.

14. $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576, \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x) = 4. \end{cases}$ *Javobi:* $x = 2$, $y = 6$.

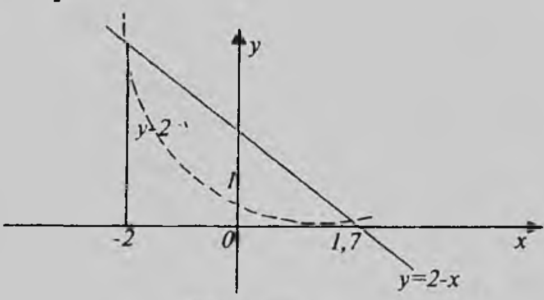
15-§. Ko'rsatkichli va logarifmik tenglamalarni grafik usulda yechish

1- misol. $2^{x+1} - x\cdot 2^x - 1 = 0$ tenglamani grafik usulda yeching.

Yechish. Tenglamaning chap tomonida berilgan $y = 2^{x+1} - x\cdot 2^x - 1 = 0$ funksiyaning grafigini chizish murakkabdir, shuning uchun bu tenglamani quyidagacha yozib olinadi: $2^{x+1} - x\cdot 2^x = 1$.

Bu tenglamaning har ikki tomoni $2^x \neq 0$ ga bo'linadi. Natijada $2-x=2^{-x}$ hosil bo'ladi. $y=2-x$ va $y=2^{-x}$ funksiyalarning grafiklari (22-chizma) koordinata tekisligida chizilsa, ularning kesishish nuqtalarining absissalari berilgan tenglamaning yechimi bo'ladi.

Javobi: $x_1=-2$, $x_2=1,7$.



22-chizma.

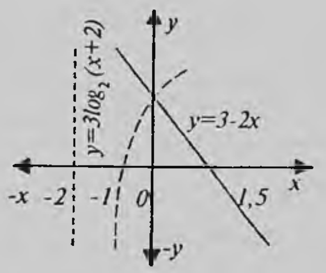
2- misol. $3log_2(x+2)+2x-3=0$ tenglamani grafik usulda yeching.

Yechish. Berilgan tenglamaning $3log_2(x+2)=3-2x$ ko'rinishida yozib olib, tenglikning har ikki tomonida turgan $y=3log_3(x+2)$ va $y=3-2x$ funksiyalarning grafiklarini koordinata tekisligida yasaymiz (23-chizma). Bu grafiklar kesishish nuqtasining absissasi berilgan tenglamaning yechimi bo'ladi.

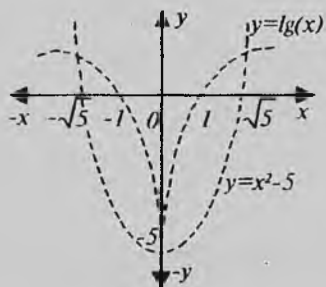
Javobi: $x=0$.

3-misol. $\lg|x|-x^2-5=0$ tenglamani grafik usulda yeching.

Yechish. Berilgan tenglama quyidagicha yozib olamiz: $lgx=x^2-5$. $y=lgx$ va $y=x^2-5$ funksiyalarini koordinata tekisligida grafiklarini yasaymiz (24-chizma).



23-chizma.



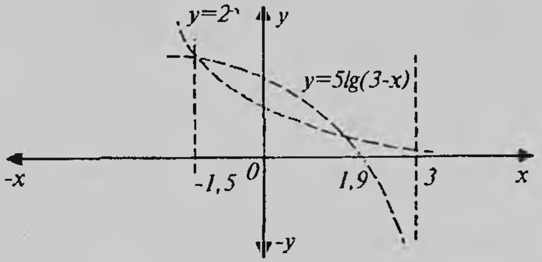
24-chizma.

Bu grafiklar kesishish nuqtalarining absissasi berilgan tenglamaning yechimi bo'ladi.

Javobi: $x_1=\sqrt{5}$, $x_2=-\sqrt{5}$.

4-misol. $2 - x - 5lg(3 - x) = 0$ tenglamani grafik usulda yeching.

Yechish. Berilgan tenglamani $y=2^{-x}$ va $y=5lg(3-x)$ ko‘rinishda yozib, ularning grafiklarini koordinata tekisligida yasaymiz. Bu grafiklar kesishish nuqtalarining absissasi berilgan tenglamaning yechimi bo‘ladi (25-chizma).



25-chizma.

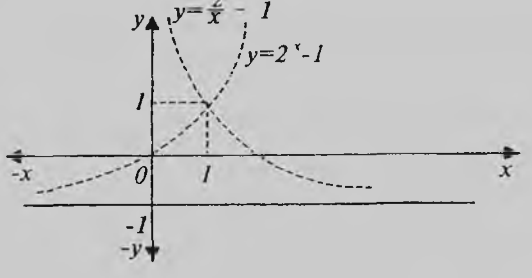
Javobi: $x_1=-1{,}5$. $x_2=1{,}9$.

5-misol. $\begin{cases} xy + x - 2 = 0, \\ x - \log_2(y+1) = 0 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini grafik usulda yeching.

Yechish. Berilgan tenglamalar sistemasi quyidagi ko‘rinishda yozib olinadi:

$$\begin{cases} xy = 2 - x, \\ \log_2(y+1) = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2-x}{x}, \\ y + 1 = 2^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2}{x} - 1, \\ y = 2^x - 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$y = \dfrac{2}{x} - 1$ va $y=2^x - 1$ funksiyalarning grafiklari koordinata tekisligida chiziladi (26-chizma).



26-chizma.

Ularning kesishish nuqtalarining absissasi tenglamaning yechimi bo‘ladi.
Javobi: $x = 1$, $y = 1$.

16-§. Trigonometrik tenglamalar

1. $\sin x=a$ tenglamada $|a|\leq 1$ bo‘lsa, u $x=(-1)^k \arcsin a+\pi k$, $k\in Z$ yechimga ega bo‘ladi. Xususiy holda

a) agar $\sin x = 0$ bo‘lsa, $x = \pi k$, $k\in Z$;

b) agar $\sin x = 1$ bo‘lsa, $x = \frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$;

d) agar $\sin x = -1$ bo‘lsa, $x = -\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$;

e) agar $\sin^2 x = a$ bo‘lsa, $x = \pm\arcsin\sqrt{a}+\pi k$, $k\in Z$.

Misol. $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\sqrt{3}=0$ tenglamani yeching.

Yechish:

$$\left[2\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\sqrt{3}=0\right] \Leftrightarrow \left[\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{-\sqrt{3}}{2}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{\pi}{4}+x=(-1)^k \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\pi k\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{\pi}{4}+x=(-1)^k\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\pi k\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x=(-1)^{k+1}\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}+\pi k\right),\ k\in Z.$$

2. $\cos x=a$ tenglamada $|a|\leq 1$ bo‘lsa, u $x=\pm\arccos a+2\pi k$, $k\in Z$; yechimga ega bo‘ladi. Xususiy holda:

a) agar $\cos x = 0$ bo‘lsa, $x = \frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$;

b) agar $\cos x = 1$ bo‘lsa, $x = 2\pi k$, $k\in Z$;

d) agar $\cos x = -1$ bo‘lsa, $x = \pi+2\pi k$, $k\in Z$;

e) agar $\cos^2 x = a$ bo‘lsa, $x = \pm\arccos\sqrt{a}+\pi k$, $k\in Z$.

Misol. $\cos\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}\right)-1=0$ tenglamani yeching.

Yechish. $\left[\cos\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}\right)-1=0\right]\Leftrightarrow\left[\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi k}{2}\right]\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}x=\frac{1}{2}+\frac{\pi k}{2}\right)\Leftrightarrow\left(x=\frac{3}{4}+\frac{3\pi k}{2}\right),\ k\in Z.$$

3. $tg\ x=a$ tenglama $x=$ arctg $a+\pi k$, $k\in Z$ yechimga ega bo'ladi. Xususiy holda

a) agar tg $x=0$ bo'lsa, $x=\pi k$, $k\in Z$;

b) agar tg $x=1$ bo'lsa, $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$;

d) agar tg $x=-1$ bo'lsa, $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$;

e) agar $tg^2x=a$ bo'lsa, $x=\pm$arctg$\sqrt{a}+\pi k$, $k\in Z$.

Misol. $3tg^2 3x-1=0$ tenglamani yeching.

Yechish. $\left(tg^2 3x=\frac{1}{3}\right)\Leftrightarrow\left(3x=\pm arctg\frac{1}{\sqrt{3}}+k\pi\right)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left(3x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi\right)\Leftrightarrow\left(x=\pm\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{3}k\right)\Leftrightarrow\left(x=\frac{\pi}{18}(6k+1)\right).$$

4. ctg $x=a$ tenglama $x=$ arcctg $a+\pi k$, $k\in Z$ yechimga ega bo'ladi.

a) agar ctg$x=0$ bo'lsa, $x=\frac{\pi}{2}\pi k$, $k\in Z$;

b) agar ctg$x=1$ bo'lsa, $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$;

d) agar ctg$x=-1$ bo'lsa, $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$;

e) agar $ctg^2x=a$ bo'lsa, $x=\pm$arcctg$\sqrt{a}+\pi k$, $k\in Z$.

Misol. $ctg^2\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=3$ tenglamani yeching.

Yechish. $\left[ctg^2\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=3\right] \Leftrightarrow \left[ctg\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\pm\sqrt{3}\right] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\left(2x-\frac{\pi}{3}=\pm arcctg\sqrt{3}+\pi k\right)\right] \Leftrightarrow \left(2x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}+\pi k\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}\right), \quad k\in z.$$

Matematika kursida har qanday trigonometrik tenglamalar ayniy almashtirishlarni bajarish orqali taqqoslanib $\sin x=a$, $\cos x=a$, $tgx=a$, ctg $x=a$ ko'rinishdagi eng sodda trigonometrik tenglamalarga keltiriladi.

Trigonometrik tenglamalar quyidagi metodlar yordamida yechiladi.

1. Ko'paytuvchilarga keltirish usuli.

1-misol. $\sin 2x = \cos 2x \sin 2x$ tenglamani yeching.

Yechish. $\sin 2x - \cos 2x \sin 2x = 0$, $\sin 2x(1-\cos x) = 0$

1) agar $1-\cos x\neq 0$ bo'lib, $\sin 2x=0$ bo'lsa, $x=\frac{\pi}{2}n$, $n\in Z$ bo'ladi.

2) agar $\sin 2x\neq 0$ bo'lib, $1-\cos x=0$ bo'lsa, $\cos x=1$, $x=2\pi n$, $n\in Z$ bo'ladi.

2-misol. $\sin 3x - \sin x = 0$ tenglamani yeching.

Yechish. $\sin 3x - \sin x = 2\sin x \cos 2x = 0$

1) agar $\cos 2x\neq 0$ bo'lib, $\sin x=0$ bo'lsa, $x=\pi n$, $n\in Z$;

2) agar $\sin x\neq 0$ bo'lib, $\cos 2x=0$ bo'lsa, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}$, $n\in Z$ bo'ladi.

3-misol. $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=1{,}5$ tenglamani yeching.

Yechish. $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ formulaga ko'ra

$$\left(\frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{1+\cos 4x}{2}+\frac{1+\cos 6x}{2}=\frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x=0) \Leftrightarrow [(\cos 2x+\cos 6x)+\cos 4x=0] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [2\cos 4x\cos 2x+\cos 4x=0] \Leftrightarrow \cos 4x(\cos 2x+1)=0.$$

1) agar $2\cos 2x+1\neq 0$ bo'lib, $\cos 4x=0$ bo'lsa, $x=\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{4}$, $n\in Z$;

2) agar $\cos 4x\neq 0$ bo'lib, $2\cos 2x+1=0$ bo'lsa, $\cos 2x=-\frac{1}{2}$,

$$2x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi n; \quad x=-\frac{\pi}{3}+\pi n; \quad n\in Z.$$

II. O'zgaruvchilarni kiritish usuli.

1-misol. $2\cos^2x=3\sin x$ tenglamani yeching.

Yechish. $(2\cos^2x-3\sin x=0)\Leftrightarrow(3\sin x-2(1-\sin^2x)=0$
$\Leftrightarrow(3\sin x-2+2\sin^2x=0)$.

Agar $\sin x = y$ desak,

$$2y^2+3y-2=0, \quad y_1=\frac{1}{2}, \quad y_2=-2.$$

$$\left(\sin x=\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow\left(x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\right), \quad k\in z.$$

2-misol. $\cos 2x-5\sin x-3=0$ tenglamani yeching.

Yechish. $\cos 2x=1-2\sin^2x$ formulaga ko'ra $(1-2\sin^2x-5\sin x-3=0)\Leftrightarrow$ $(2\sin^2x+5\sin x+2=0)\Leftrightarrow$ $\sin x=y$ desak, $2y^2+5y+2=0$, $y_1=-2$, $y_2=-\frac{1}{2}$.

1) $\sin x=-2$ tenglama yechimga ega emas.

2) $\left(\sin x=-\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow\left(x=(-1)^k\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\pi k\right), k\in z;$

$$x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z.$$

III. Bir jinsli tenglamalarni yechish.

1-misol. $2\sin^2x-\sin x\cos x-\cos^2x=0$ tenglamani yeching.

Yechish. Bu tenglama sinus va kosinus funksiyalariga nisbatan bir jinslidir. Tenglamalarning har ikki tomonini $\cos^2x\neq0$ ga bo'lsak,

$2\mathrm{tg}^2x-\mathrm{tg}\,x-1=0$ hosil bo'ladi. Bundan $\mathrm{tg}x=1$ va $\mathrm{tg}\,x=-\frac{1}{2}$.

1) agar $\mathrm{tg}x=1$ bo'lsa, $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z;$

2) agar $\mathrm{tg}\,x=-\frac{1}{2}$ bo'lsa, $x=-\mathrm{arctg}\frac{1}{2}+\pi k,\ k\in Z$ bo'ladi.

2-misol. $\cos^2x+3\sin^2x+2\sqrt{3}\sin x\cos x=3$ tenglamani yeching.

Yechish. Bu tenglama ayniy almashtirishlar bajarish orqali bir jinsli ko'rinishga keltiriladi.

$$\cos^2 x + 3\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x = 3(\sin^2 x + \cos^2 x),$$
$$\cos^2 x + 3\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x - 3\sin^2 x - 3\cos^2 x = 0$$
$$2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x = 0.$$
$$2\cos x(\cos x - \sqrt{3}\sin x) = 0.$$

1) agar $\cos x - \sqrt{3}\sin x \neq 0$ bo‘lib, $\cos x=0$ bo‘lsa, $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$;

2) agar $\cos x \neq 0$ bo‘lib, $\cos x - \sqrt{3}\sin x=0$ bo‘lsa, $\mathrm{tg}x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi$, $k\in Z$;

IV. $a\sin x+b\cos x = c$ ko‘rinishdagi tenglamani yeching.

I usul. Bu tenglamani yechish uchun $tg\dfrac{x}{2}=t$ almashtirish bajariladi.

Ma’lumki, $\sin x = \dfrac{2tg\dfrac{x}{2}}{1+tg^2\dfrac{x}{2}}$, $\cos x = \dfrac{1-tg^2\dfrac{x}{2}}{1+tg^2\dfrac{x}{2}}$, edi, shunga ko‘ra berilgan tenglama quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$\frac{2at}{1+t^2}+\frac{b(1-t^2)}{1+t^2}=c, \qquad 2at+b-bt^2=c+ct^2,$$

$$(b+c)t^2-2at+(c-b)=0, \qquad t=\frac{a\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{c+b},$$

$$x=2arctg\frac{a\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{c+b}+2k\pi,\ k\in z,\ a^2+b^2\geq c^2 \ \text{va}\ \ b\neq -c.$$

Agar $b=-c$ bo‘lsa, kvadrat tenglama chiziqli tenglamaga almashadi:

$$2at+2b=0, \quad t=-\frac{b}{a},\ x=-2\mathrm{arctg}\frac{b}{a}+2k\pi,\ k\in Z.$$

II usul. Tenglamaning har ikkala tomoni $\sqrt{a^2+b^2}$ ga bo‘linadi:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \left|\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|^2\leq 1.$$

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1 \quad \text{va} \quad \left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|^2 \leq 1,$$

Agar $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi$ va $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi$ desak, berilgan tenglama

$\sin x\cdot\cos\varphi+\cos x\cdot\sin\varphi=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ko'rinishni oladi, bundan $\sin(x+\varphi)\times$

$\times\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ bo'ladi. $\varphi=\mathrm{arctg}\frac{b}{a}$; agar $a^2+b^2\geq c^2$ bo'lsa, $x=(-1)^k$

$$\arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}+\pi k-arctg\frac{b}{a}, \qquad k\in z.$$

1-misol. $3\cos x+4\sin x=5$ tenglamani yeching.

Y e c h i s h. $\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}$ bo'lgani uchun tenglamaning har ikki tomoni 5 ga bo'linadi: $\frac{3}{5}\cos x+\frac{4}{5}\sin x=1$, $\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1$, shuning uchun $\frac{3}{5}=\sin\varphi$ va $\frac{4}{5}=\cos\varphi$ bo'ladi, bundan $\sin\varphi\cdot\cos x+\cos\varphi\sin x=1$ tenglama hosil qilinadi yoki $\sin(x+\varphi)=1$ bo'ladi:

$$x+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi, \qquad x=\frac{\pi}{2}+2k\pi-\varphi, \qquad k\in z,$$

$$\varphi=\arcsin\frac{3}{5}, \qquad x=\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{3}{5}+2k\pi, \qquad k\in z.$$

2- usul. Agar $\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$, va $\cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$, ekanligini nazarda tutib, $tg\frac{x}{2}=y$ desak, $3\cdot\frac{1-y^2}{1+y^2}+4\cdot\frac{2y}{1+y^2}=5$, yoki $3-3y^2+8y=5+5y^2$ yoki

$4y^2$-$4y$+1=0 bundan $y=\frac{1}{2}$ yechim hosil bo'ladi:

$$\left(tg\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{x}{2}=arctg\frac{1}{2}+\pi k\right), \quad x=2arctg\frac{1}{2}+2\pi k, \qquad k\in\pi.$$

MUSTAQIL YECHISH UCHUN MISOLLAR

Trigonometrik tenglamalarni yeching.

1. $tgx+\sin x tgx=0.$ *Javobi:* $n\pi.$

2. $2\sin x-3\cos x=6.$ *Javobi:* $x\in\varnothing.$

3. $\sin^2 x-(1+\sqrt{3})\sin x\cos x+\sqrt{3}\cos^2 x=0.$

Javobi: $\frac{\pi}{4}+n\pi, \quad arctg3+n\pi.$

4. $\sin^2 x-4\sin x\cos x+3\cos^2 x=0.$ *Javobi:* $\frac{\pi}{4}+n\pi, \quad arctg3+n\pi.$

5. $\sqrt{3}\sin^2 x-4\sin x\cos x+\sqrt{3}\cos^2 x=0.$ *Javobi:* $\frac{\pi}{3}+n\pi, \quad \frac{\pi}{6}+k\pi.$

6. $\sin^2 x+3\cos^2 x-2\sin x\cos x=\frac{-5-\sqrt{3}}{2}.$ *Javobi:* $\frac{\pi}{6}+k\pi.$

7. $7\cos^2 x-7\sin 2x=2.$ *Javobi:* $x=arctg\frac{-7\pm\sqrt{53}}{2}.$

8. $\frac{2}{3\sqrt{2}\sin x-1}=1.$ *Javobi:* $x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{4}+k\pi, \; k\in z.$

9. $\frac{6}{tgx-2}=3-tgx.$ *Javobi:* $k\pi, \; \frac{\pi}{4}+k\pi.$

10. $(1-2\sin x)\sin x=2\cos 2x-1.$ *Javobi:* $x=2k\pi\frac{\pi}{2}.$

11. $\sin^4 x+\cos^4 x-2\sin 2x+\sin^2 2x=0.$

Javobi: $x=\frac{(-1^k)}{2}\arcsin(2-\sqrt{2})+\frac{k\pi}{2}.$

12. $\sin^3 x \cos x - \cos^3 \sin x = \cos^4 \dfrac{x}{3}$.

Javobi: $x = \dfrac{1}{4}\left[(-1)^{k+1} \arcsin \dfrac{1}{4} + k\pi\right]$.

13. $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 4x$. *Javobi:* $\dfrac{\pi}{2} n$.

14. $tg(40^0 + x)ctg(5^0 - x) = \dfrac{2}{3}$.

Javobi: $x = \dfrac{1}{2}\left[\pi k - 35^0 + (-1)^{k+1} \arcsin \dfrac{\sqrt{2}}{10}\right]$.

15. $(\sin x + \cos x) = \mathrm{tg} x + \mathrm{ctg} x$. *Javobi:* $x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{4}$.

16. $\sin 3x \cdot \sin^3 x + \cos 3x \cdot \cos^3 x = \dfrac{1}{8}$. *Javobi:* $x = \pi k \pm \dfrac{\pi}{6}$.

17. $\sin x + \sin 3x + \sin 7x = 3$. *Javobi:* $x = \varnothing$.

18. $tg 7x + tg 3x = 0$. *Javobi:* $x = \dfrac{\pi k}{10}$.

19. $1 + \sin x + \cos x = 0$. *Javobi:* $x_1 = \pi k - \dfrac{\pi}{2}$, $x_2 = \pi(2n+1)$.

20. $\sin^{10} x + \cos^{10} x = \dfrac{29}{16} \cos^4 2x$. *Javobi:* $x = \dfrac{2k+1}{8} \pi$.

21. $|\mathrm{tg} x + \mathrm{ctg} x| = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$. *Javobi:* $x = \pi k \pm \dfrac{\pi}{6}$.

22. $13 \sin x - 12 \cos x + 13 \sin 3x = 0$. *Javobi:* $x = \dfrac{\pi k}{2}$.

23. $1 + 2\cos 2x + 2\cos 4x + 2\cos 6x = 0$. *Javobi:* $x = \dfrac{\pi k}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$; $x = \pm \dfrac{\pi}{3} \pm \dfrac{k\pi}{3}$.

24. $\cos^4 x + \cos^4 \left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{4}$. *Javobi:* $x = \dfrac{\pi k}{2} (k+1)$.

25. $2\sin 2x+\sin x+\cos x=1$. *Javobi:* $x_1=2k\pi,\ x_2=2k\pi+\frac{\pi}{2}$.

26. $3\sin x+\sin(x+\frac{3\pi}{2})=1-3\sin x\cos x$. *Javobi:* $(2k+1)\pi,\ k\in Z$.

27. $3-\cos^2 x-3\sin x=0$. *Javobi:* $\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z$.

28. $\cos^3 x+4\sin^2\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}\ \cos x=0$. *Javobi:* $\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z$.

29. $\cos^2 2x-\sin^2 2x=-\frac{1}{2}$. *Javobi:* $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\leq k,\ k\in Z$.

30. $\sin^3 x+2\sin\frac{x}{2}\ \cos\frac{x}{2}=0$. *Javobi:* $\pi k,\ k\in Z$.

31. $\sin^2 x\cos\frac{x}{2}-\sin 2x\sin\frac{x}{2}=0$ *Javobi:* $\pi k,\ k\in Z$.

17-§. Parametrli trigonometrik tenglamalarni yechish

Parametrli trigonometrik tenglamani yechish parametrlarning mumkin bo'lgan har bir qiymatlari sistemasi uchun berilgan tenglamaning hamma yechimlari to'plamini aniqlash demakdir. Parametrik ko'rinishdagi trigonometrik tenglamalarni yechish quyidagi ketma-ketliklar asosida amalga oshiriladi.

1. Parametrlarning mumkin bo'lgan har bir qiymatlari sistemasi uchun yechimlar sonini aniqlash.
2. Hosil qilingan parametrli yechim formulalarini topish.
3. Tenglamani parametrlar asosidagi qiymatlar sistemasini aniqlash.

1-misol. $\sin(a+x)+\sin x=\cos\frac{a}{2}$ tenglamani yeching.

Yechish. Berilgan tenglamaning chap tomonida turgan ifodaga trigonometrik funksiyalar yig'indisini ko'paytmaga keltirish formulasini tatbiq qilsak, u quyidagi ko'rinishni oladi:

$$2\sin\left(\frac{\alpha}{2}+x\right)\cos\frac{\alpha}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Bu tenglamada quyidagi ikki hol bo'lishi mumkin.

1. Agar $\cos\frac{\alpha}{2} \neq 0,\ \alpha \neq (2n+1)\pi$ bo'lsa, u holda tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$2\sin(\frac{\alpha}{2} + x) = 1, \qquad x = -\frac{\alpha}{2} + (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in Z.$$

2. Agar $a=(2n+1)\pi$ bo'lsa, u holda $\cos\frac{\alpha}{2} = 0$ bo'ladi. Bu holda ham tenglik o'rinli bo'ladi:

Javobi: $$x = \begin{cases} -\frac{\alpha}{2} + (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi, & \alpha \neq (2n+1)\pi, \\ -ixtiyoriy \quad son\ , & \alpha = (2n+1)\pi. \end{cases}$$

2-misol. $\sin^2 x + a\sin^2 2x = \sin\frac{\pi}{6}$ tenglamani yeching.

Yechish. $\frac{1-\cos 2x}{2} + a(1-\cos^2 2x) = \frac{1}{2}$,

$1-\cos 2x + 2a - 2a\cos^2 2x = 1, \quad 2a\cos^2 2x + \cos 2x - 2a = 0,$

$$(\cos 2x)_1 = \frac{-1+\sqrt{1+16a^2}}{4a}; \qquad (\cos 2x)_2 = \frac{-1-\sqrt{1+16a^2}}{4a},$$

a) $\cos 2x = \frac{-1+\sqrt{1+16a^2}}{4a}$, $\quad 1+16a^2>0, \quad \left|\frac{-1+\sqrt{1+16a^2}}{4a}\right| \leq 1,$

$$-1+\sqrt{1+16a^2} \leq 4a, \qquad 1+16a^2 \leq 4a^2+8a+1,$$

$$12a^2-8a \leq 0; \quad a(12a-8) \leq 0$$

1) $a=0, \quad 12a-8 \neq 0,$

2) $a \neq 0, \quad 12a-8=0, \quad a=\frac{2}{3}$, bundan $a \leq \frac{2}{3}$ bo'ladi.

b) $\cos 2x = \frac{-1-\sqrt{1+16a^2}}{4a}; \qquad \left|\frac{-1-\sqrt{1+16a^2}}{4a}\right| \leq 1,$

tengsizlik a ning hech qanday qiymatlarida bajarilmaydi. Agar $a=0$ bo'lsa $\left(\sin^2 x = \frac{1}{2}\right) \Rightarrow x_{1,2} = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z.$

Javobi: $a\neq 0$ da $x_{1,2}=\pi k\pm\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{-1+\sqrt{1+16a^2}}{4a}\right)$.

$a=0$ da $x_{3,4}=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in Z.$

3-misol. $\cos x+\sin x=a$ tenglamani yeching.

Y e c h i s h. $\cos x+\sin x=\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})$; agar $|a|\leq\sqrt{2}$ bo‘lsa, bu tenglama yechimga ega bo‘ladi. Agar $|a|\leq\sqrt{2}$ bo‘lsa, $x=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{a}{\sqrt{2}}+2k\pi$, agar $|a|>\sqrt{2}$ bo‘lsa, yechim yo‘q.

4-misol. $\sin 2x+3\cos 2x=a$ tenglamani yeching.

Y e c h i s h. $2\sin x\cdot\cos x+3\cos^2x-3\sin^2x=a$,

$2\mathrm{tg}x+3-3\mathrm{tg}^2x=a(1+\mathrm{tg}^2x)$, $\mathrm{tg}^2x(a+3)-2\mathrm{tg}x+(a-3)=0$,

$$[tgx]_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{10-a^2}}{a+3}.$$

Agar $|a|\leq\sqrt{10}$ bo‘lsa, $a_1=arctg\frac{1\pm\sqrt{10-a^2}}{a+3}+k\pi,\ k\in Z$. Agar $a=-3$ bo‘lsa, $\sin 2x+3\cos 2x=-3$ bo‘ladi.

$2\sin x\cos x+3\cos^2x+3\cos^2x-3=-3$, $2\sin x\cos x+6\cos^2x=0$,

$\cos x(\sin x+3\cos x)=0$,

1) $\cos x=0$, $\sin x+3\cos x\neq 0$, $x_1=+k\pi,\ k\in Z$;

2) $\cos x\neq 0$, $\sin x+3\cos x=0$, $x_2=\mathrm{arctg}(-3)+k\pi,\ k\in Z.$

Javobi: Agar $|a|\leq\sqrt{10}$ $(a\neq-3)$ bo‘lsa, $a=arctg\frac{1\pm\sqrt{10-a^2}}{a+3}+k\pi, k\in Z$, agar $(a\neq-3)$ bo‘lsa, $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z.$; agar $|a|>\sqrt{10}$ bo‘lsa, tenglama yechimga ega emas.

5- misol. $\sin^6x+\cos^6x=a(\sin^4x+\cos^4x)$ tenglamani yeching.

Y e c h i s h. $\sin^4x+\cos^4x=(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x\cos^2x=1-2\sin^2x\cos^2x$,

$\sin^6x+\cos^6x=(\sin^2x+\cos^2x)^3-3\sin^4x\cos^2x-3\sin^2x\cdot\cos^4x)=1-3\sin^2x\cos^2x$,

$1\text{-}3\sin^2x\cos^2x=a(1-2\sin^2x\cos^2x)$, $1-3\sin^2x\cos^2x=a-2a\sin^2x\cos^2x$,

$$\sin^2 x\cdot\cos^2 x=\frac{a-1}{2a-3},\quad \sin^2 2x=4\cdot\frac{a-1}{2a-3}.$$

Agar bunda $0\le 4\cdot\frac{a-1}{2a-3}\le 1$ bo'lsa, tenglama ma'noga ega bo'ladi. Bu tengsizlikni yechsak, $\frac{1}{2}\le a\le 1$ bo'ladi. Agar $a=\frac{3}{2}$ bo'lsa, $1-3\sin^2 x\cos^2 x=\frac{3}{2}-$ $-3\sin^2 x\cos^2 x$ hosil bo'ladi, bundan $1=\frac{3}{2}$ tenglik hosil bo'ladi, buning bo'lishi mumkin emas.

Agar $\frac{1}{2}\le a\le 1$ bo'lsa, $x=\pm\frac{1}{2}\arcsin\left(2\sqrt{\frac{a-1}{2a-3}}\right)+\frac{k\pi}{2}.$

Agar $a<\frac{1}{2}$ va $a>1$ bo'lsa, yechim yo'q.

6-misol. $\sin\frac{3x}{2}+\sin x=m\sin\frac{x}{2}$ tenglamani yeching.

Yechish. $\sin\left(x+\frac{x}{2}\right)=\sin x\cos\frac{x}{2}+\cos x\sin\frac{x}{2}$, bunga ko'ra

$$\sin x+\sin x\cos\frac{x}{2}+\cos x\sin\frac{x}{2}-m\sin\frac{x}{2}=0,$$

$$\sin x\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)+\sin\frac{x}{2}(\cos x-m)=0,$$

$$\sin\frac{x}{2}\left[2\cos\frac{x}{2}+4\cos^2\frac{x}{2}-1-m\right]=0.$$

1) $\sin\frac{x}{2}=0,\ x=2k\pi,\ k\in Z;$

2) $4\cos^2\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}-(1+m)=0,\qquad \cos\frac{x}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{5+m\cdot 4}}{4}.$

a) $\cos\frac{x}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{5+m\cdot 4}}{4}$, bunda quyidagi shartlar bajarilishi kerak:

$$\begin{cases} 5+4m \geq 0, \\ \left|\dfrac{-1 \pm \sqrt{5+4m}}{4}\right| \leq 1. \end{cases}$$

Bu tengsizliklarni yechsak, $-\frac{5}{4} \leq m \leq 5$ hosil bo'ladi. Bu shartga ko'ra

$$x = \pm 2\arccos\frac{-1 \pm \sqrt{5+4m}}{4} + 4k\pi, \ k \in Z;$$

b) $\cos\frac{x}{2} = \frac{-1-\sqrt{5+4m}}{4}$.

Bu yechilsa, $x = \pm 2\arccos\frac{-1 \pm \sqrt{5+4m}}{4} + 4k\pi, \ k \in Z, \ -\frac{5}{4} \leq m \leq 1.$

Javobi: Agar $-\frac{5}{4} \leq m \leq 1.$ bo'lsa, $x_1 = 2k\pi, \ k \in Z.$

$x_{2,3} = \pm 2\arccos\frac{-1 \pm \sqrt{5+4m}}{4} + 4k\pi, \ k \in Z,$ Agar $1 \leq m \leq 5$ bo'lsa,

$x_1 = 2k\pi, \ k \in Z$ $x_2 = \pm 2\arccos\frac{-1+\sqrt{5+4m}}{4} + 4k\pi, \ k \in Z,$

Agar $m > 5, \ m < -\frac{5}{4}$ bo'lsa, $x = 2k\pi, \ k \in Z.$

18-§. Trigonometrik tenglamalar sistemasini yechish

Tarkibida trigonometrik funksiyalar qatnashgan bir necha tenglama trigonometrik tenglamalar sistemasini hosil qiladi. Trigonometrik tenglamalar sistemasini yechish tenglamadagi no'malumlarning shu tenglamalar sistemasini qanoatlantiradigan qiymatlarini topish demakdir. Ikki noma'lumli ikkita tenglama sistemasining yechimi deb, noma'lumlarning ikkala tenglamani ham qanoatlantiradigan juft qiymatlariga aytiladi.

1- misol. $\begin{cases} x+y = \frac{\pi}{4} \\ tgx + tgy = 1 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish. $y=\frac{\pi}{4}-x,\ tgx+tg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1,\ \frac{tgx(tgx-1)}{1+tgx}=0;$

$a)\ tgx=1,\quad x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ y=-k\pi,\ k\in Z;$

$b)\ tgx=0,\ x=k\pi,\ y=\frac{\pi}{4}-k\pi,\ k\in Z.$

Javobi: $\begin{cases} x_1=\pi k+\frac{\pi}{4}, \\ y_1=-\pi k, \end{cases}\quad \begin{cases} x_2=\pi k, \\ y_2=\frac{\pi}{4}-\pi k, \end{cases}\ k\in Z.$

2-misol. $\begin{cases} \frac{\cos(x+y)}{\cos(x-y)}=\frac{1}{9} \\ \sin x\cdot\sin y=\frac{1}{3} \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish. $\left[\frac{\cos x\cos y-\sin x\sin y}{\cos x\cos y+\sin x\sin y}=\frac{1}{9}\right]\Rightarrow\left[\frac{\cos x\cos y+\frac{1}{3}}{\cos x\cos y-\frac{1}{3}}\right]=\frac{1}{9},$

$\cos x\cos y=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\left[\cos x\cos y+\frac{1}{3}\right],\qquad \cos x\cos y=\frac{1}{3}+\frac{1}{27}+\frac{1}{9}\cos x\cos y,$

$\frac{8}{9}\cos x\cos y=\frac{10}{27}\quad \cos x\cos y=\frac{5}{12},$

$\begin{matrix}-\\+\end{matrix}\begin{cases} \cos x\cos y=\frac{5}{12} \\ \sin x\sin y=\frac{1}{3} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \cos x\cos y-\sin x\sin y=\frac{1}{12}, \\ \cos x\cos y+\sin x\sin y=\frac{3}{4} \end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases} \cos(x+y)=\frac{1}{12} \\ \cos(x-y)=\frac{3}{4} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x+y=2k_1\pi\pm\arccos\frac{1}{2} \\ x-y=2k_2\pi\pm\arccos\frac{3}{4} \end{cases}$

$$x = \pi(k_1 + k_2) \pm \frac{1}{2}\left[\arccos\frac{1}{12} + \arccos\frac{3}{4}\right] =$$

$$= \pi(k_1 + k_2) \pm \frac{1}{2}\arccos\frac{3-\sqrt{1001}}{48}.$$

$$y = \pi(k_1 - k_2) \pm \frac{1}{2}\left[\arccos\frac{1}{12} - \arccos\frac{3}{4}\right] = \pi(k_1 - k_2) \pm \frac{1}{2}\arccos\frac{3+\sqrt{1001}}{48}.$$

3-misol. $\begin{cases} \sin x + \sin y = a \\ x + y = 2b \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish. $\begin{cases} 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = a \\ x + y = 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\sin b\cos\frac{x-y}{2} = a, \\ x + y = 2b \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\cos\frac{x-y}{2} = \frac{a}{2\sin b}\right] \Rightarrow \left[x - y = 2\left[k\pi \cdot 2 \pm \arccos\frac{a}{2\sin b}\right]\right].$$

$$y = \frac{b}{2} - \arccos\frac{a}{\sin b} + k\pi,\ \ x = \frac{3b}{2} + \arccos\frac{a}{\sin b} + k\pi,\ \ k \in Z.$$

1) agar $b = 0$, $a \neq 0$ bo‘lsa, sistema yechimga ega emas.

2) agar $b \neq 0$, $\left|\frac{a}{2\sin b}\right| \leq 1$ bo‘lsa, sistema yechimga ega.

3) agar $b=0$, $a=0$ bo‘lsa, sistema cheksiz ko‘p yechimga ega.

MUSTAQIL YECHISH UCHUN MISOLLAR

Tenglamalar sistemasini yeching.

1. $\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{\sqrt{3}-1}{4}, \\ \cos x \cos y = \frac{\sqrt{3}+1}{4}. \end{cases}$ *Javobi:* $j: x = 45°,\ y = 15°.$

2. $\begin{cases} \sin x : \sin y = \sqrt{1,5}, \\ \cos x : \cos y = \sqrt{0,5}. \end{cases}$ *Javobi:* $x = 60°,\ y = 45°.$

3. $\begin{cases} \sin x = \sqrt{2}\sin y, \\ tgx = \sqrt{3}tgy. \end{cases}$ *Javobi:* $x = 45^\circ,\ y = 30^\circ$.

4. $\begin{cases} \sin x + \cos y = \dfrac{1}{2}, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$ *Javobi:* $x = 0^\circ,\ y = 60^\circ$.

5. $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2}, \\ \sin x + \cos y = 1. \end{cases}$ *Javobi:* $x = \dfrac{\pi}{6},\ y = \dfrac{\pi}{3}$.

6. $\begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{6}, \\ \sin x \cos y = 0,75. \end{cases}$ *Javobi:* $x = \dfrac{\pi}{3},\ y = \dfrac{\pi}{6}$.

7. $\begin{cases} x + y = \dfrac{2}{3}\pi, \\ \sin x \sin y = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$ *Javobi:* $x = \dfrac{5\pi}{12},\ y = \dfrac{\pi}{4}$.

19-§. Masalalarni tenglama tuzish bilan yechish metodikasi

Masala — bu kundalik hayotimizda uchraydigan vaziyatlarning tabiiy tildagi ifodasidir. Masala asosan uch qismdan iborat bo'ladi.

1. Masalaning sharti — o'rganilayotgan vaziyatni xarakterlovchi ma'lum va no'malum miqdoriy qiymatlar hamda ular orasidagi miqdoriy munosabatlar haqidagi ma'lumot demakdir.

2. Masalaning talabi — masala shartidagi miqdoriy munosabatlarga nimani topish kerakligini ifodalash demakdir.

3. Masalaning operatori — masala talabini bajarish uchun shartdagi miqdoriy munosabatlarga nisbatan bajariladigan amallar yig'indisi.

Tenglama tuzish orqali masala yechish, masala talabida so'ralgan miqdorni imkoniyati boricha biror harf bilan belgilash, masala shartida qatnashayotgan boshqa miqdorlarni belgilangan harf orqali ifodalash, masala shartida ko'rsatilgan miqdoriy munosabatlarni, amallarning mantiqan to'g'ri ketma-ketligi orqali ifodalaydigan tenglama tuzish va uni yechish orqali masalaning talabini bajarish demakdir.

Masalalarni tenglama tuzish orqali yechishni quyidagi ketma-ketlik asosida olib borish maqsadga muvofiqdir.

1. Masala talabida so'ralgan miqdorni, ya'ni noma'lum miqdorni harf bilan belgilash.

2. Bu harf yordamida boshqa no'malumlarni ifodalash.

3. Masala shartini qanoatlantiruvchi tenglama tuzish.

4. Tenglamani yechish.

5. Tenglama yechimini masala sharti bo'yicha tekshirish.

Maktab matematika kursida tenglama tuzish orqali yechiladigan masalalar ko'pincha uchta har xil miqdorlarni o'zaro bog'liqlik munosabatlari asosida beriladi. Chunonchi:

1) tezlik, vaqt va masofa;

2) narsaning qiymati, soni va jami bahosi;

3) mehnat unumdorligi, vaqt va ishning hajmi;

4) yonilg'ining sarf qilish me'yori, transportning harakat vaqti yoki masofasi va yonilg'ining miqdori;

5) jismning mustahkamligi, hajmi va uning og'irligi;

6) ekin maydoni, hosildorlik va yig'ilgan hosildorlik miqdori;

7) quvurni o'tkazish imkoniyati, vaqti va quvurdan o'tayotgan moddalarning aralashma miqdori;

8) bir mashinaning yuk ko'tarishi, mashinalar soni va keltirilgan yuklarning og'irligi;

9) suyuqlikning zichligi, chiqarish chuqurligi va bosimi;

10) tokning kuchi, uchastka zanjirining qarshiligi va uchastkadagi kuchlanishning pasayishi;

11) kuch, masofa va ish;

12) quvvat, vaqt va ish;

13) kuch, yelkaning uzunligi va quvvat momenti.

Masalalarni tenglama tuzib yechishda no'malum miqdorlarni turlicha belgilash, ya'ni asosiy miqdor qilib noma'lumlardan istalgan birini olish mumkin. Asosiy qilib olinadigan va harf bilan belgilanadigan noma'lumni tanlash ixtiyoriy bo'lishi mumkin.

Noma'lum miqdorni tanlashga qarab tuziladigan tenglama har xil bo'ladi, ammo masalaning yechimi bir xil bo'ladi. Fikrimizning dalili sifatida quyidagi masalani turlicha usul bilan yechib ko'raylik.

1- masala. Ikki idishga 1480 litr suv sig'adi. Birinchi idishga ikkinchi idishga qaraganda 760 litr suv ko'p sig'sa, har qaysi idishga necha litr suv sig'adi?

Yechish. *I usul.*

1. Belgilash: x_1 — ikkinchi idishdagi suv bo'lsin, u holda $(x + 760)$ birinchi idishdagi suv bo'ladi.

2. Taqqoslanuvchi miqdorlar: I va II idishdagi suvlarning miqdori x_1 va $(x + 760)_1$.

3. Tenglama tuzish: $x + x + 760 = 1480$.

4. Tenglamani yechish. $2x+760=1480$, $2x=1480-760$, $2x=720$. $x=720:2=360$ litr. Bu ikkinchi idishdagi suv $x=360+760=1120$ litr, birinchi idishdagi suv.

5. Tekshirish. $360 + 360 + 760 = 1480$. $1480 = 1480$.

II usul. Belgilash. x_l — birinchi idishdagi suv bo'lsa, u holda $(x - 760)_l$ ikkinchi idishdagi suv bo'ladi.

2. Taqqoslanuvchi miqdorlar. I va II idishdagi suvlarning miqdori.

3. Tenglama tuzish. $x + x - 760=1480$.

4. Tenglamani yechish. $2x-760=1480$, $2x=1480+760=2240$.

$x=2240:2=1120$ litr, birinchi idishdagi suv, $x=1120-760=360$ litr, bu ikkinchi idishdagi suv.

5. Tenglamani tekshirish.

$$x+x-760=1480, \quad 1120+360=1480, \quad 1480=1480.$$

III usul. 1. Belgilash. Faraz qilaylik, birinchi idishga x l suv sig'sin, ikkinchi idishga esa y l suv sig'sin.

2. Taqqoslanadigan miqdorlar. Birinchi va ikkinchi idishlardagi suv miqdorlari va ularning o'zaro farqi.

3. Tenglama tuzish. $\begin{cases} x + y = 1480, \\ x - 760 = y. \end{cases}$

4. Sistemani yechish. $\begin{matrix} x + y = 1480, \\ x - 760 = y. \end{matrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + x - 760 = 1480, \\ x - 760 = y. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 1240, \\ x - 760 = y. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1120, \\ y = 360. \end{cases}$$

5. Tekshirish. $1120 + 360 = 1480$, $1480 = 1480$,
$1120 - 760 = 360$, $360 = 360$.

2-masala. Ikki traktor birgalikda ishlab bir maydonni 6 soatda haydab bo'ladi. Agar I traktorchining yolg'iz o'zi ishlasa, bu maydonni II traktorchiga nisbatan 5 soat tez haydab bo'ladi. Bu maydonni har qaysi traktorchining yolg'iz o'zi necha soatda haydab bo'ladi?

Yechish.

1. Belgilashlar. Agar I-traktorning yerni haydash uchun sarflagan vaqtini x soat desak, u holda II-traktorning yerni haydash uchun sarflagan vaqti $(x + 5)$ soat bo'ladi.

$\frac{1}{x}$ I - traktorning 1 soatdagi ishi.

$\frac{1}{x+5}$ II - traktorning 1 soatdagi ishi.

2. Taqqoslanadigan miqdorlar. $\frac{1}{x}$ va $\frac{1}{x+5}$

3. Tenglama tuzish. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+5}=\frac{1}{6}$

4. Tenglamani yechish.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+5}=\frac{1}{6}$$

$$6(x+5)+6x=x^2+5x, \quad x^2-7x-30=0$$

$$x_{1,2}=\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{49}{4}+30}=\frac{7}{2}\pm\frac{13}{2}\text{lim}$$

$x_1=10$, $x_2=-3$ chet ildiz

$x=10$ soat – birinchi traktorning yerni hayday oladigan vaqti.
$x=15$ soat – ikkinchi traktorning yerni hayday oladigan vaqti.
5. Tekshirish.

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{3+2}{30}=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}.$$

II - usul. Berilgan masalani tenglamalar sistemasini tuzish orqali yechish quyidagicha bajariladi.

1. Belgilash. Faraz qilaylik, I - traktor yer maydonini x soatda, II – traktor yer maydonini y soatda haydab bo‘lsin, y holda I-traktorning bir soatdagi ishi $\frac{1}{x}$, II-traktorning bir soatdagi ishi $\frac{1}{y}$ bo‘ladi.

2. Taqqoslanuvchi miqdorlar. Birinchi traktorning ish soati bilan ikkinchi traktorning ish soati hamda ular orasidagi vaqtning farqi.

3. Tenglamalar sistemasini tuzish.

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6},\\ x-y=5.\end{cases}$$

4. Sistemani yechish.

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6}\\ x-y=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6y+6x=xy\\ x=5+y\end{cases}\Rightarrow(6y+6(5+y)=5y+y^2)\Rightarrow\begin{cases}y^2-7y-30=0,\\ x=5+y\end{cases}$$

$$y_{1,2}=\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{49}{4}+30}=\frac{7}{2}\pm\frac{13}{2}.$$

y_1 = 10 kun; x=5+10=15 kun, y_2=-3 chet ildiz.

5. Tekshirish.

$$\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{1}{6}\right)\Rightarrow\left(\frac{1}{6}\right).$$

3-masala. Turist paraxodda 72 km suzdi, paraxodda o'tgan yo'lidan 25% ortiq masofani avtomashinada yurdi. Avtomobil tezligi paraxod tezligidan soatiga 21 km ortiq. Turist avtomobilda paraxodda yurganiga qaraganda 1 soat kam yurgan bo'lsa, avtomobilning tezligi qancha?

Y e c h i s h .

1. Belgilashlar. x paraxodning tezligi bo'lsa, u holda $(x+21)$ – avtomobilning tezligi bo'ladi. $\frac{72}{x}$ – paraxodda sarf qilingan vaqt, $\frac{90}{x+21}$ – avtomobilda sarf qilingan vaqt.

2. Taqqoslanuvchi miqdorlar. va

3. Tenglama tuzish. $\frac{72}{x}-\frac{90}{x+21}=1$

4. Tenglamani yechish. $\frac{72}{x}-\frac{90}{x+21}=1$

$$72(x+21)-90x=x^2+21x$$
$$x^2+21x-72x+90x-1512=0$$
$$x^2+39x-1512=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-39\pm\sqrt{1521+4\cdot1512}}{2}=\frac{-39\pm87}{2}$$

x=24 *km/s* paraxod tezligi, x=45 *km/s*, avtomobil tezligi.

T e k s h i r i s h : 24 45 = 24 45.

$$\frac{72}{24}-\frac{90}{45}=1;\quad 72\cdot45-90\cdot24=24\cdot45.$$

4- masala. Kotlovan qazish uchun ikkita ekskavator ishga solindi. I ekskavator soatiga II ekskavatorga qaraganda 40 kub m ortiq tuproq oladi.

I ekskavator 16 soat, II ekskavator 24 soat ishladi. Shu vaqt ichida ikkala ekskavatorda 8640 kub. m tuproq qazib olindi. Har qaysi ekskavator soatiga necha kub metr tuproq olgan?

Yechish.

1. Belgilashlar. Agar I ekskavator soatda x kub metr tuproq qaziydi desak, u holda II ekskavator (x-40) kub metr tuproq qaziydi. I ekskavatorning 16 soatdagi qazigan tuprog'i 16x, II ekskavatorning 24 soatda qazigan tuprog'i 24(x-40) bo'ladi.

2. Taqqoslanadigan miqdorlar. 16x va 24 (x-40)

3. Tenglama tuzish. 16x+24 (x-40)=8640.

4. Tenglamani yechish. 16x+24x-960=8640. 40x=9600, x=240 kub metr - I ekskavatorchining I soatda qazigan tuprog'i. x-40=240-40=200 kub metr, II ekskavatorning 1 soat qazigan tuprog'i.

5. Tekshirish. 16 240+24 200=8640, 8640=8640.

5-masala. Teplovoz ma'lum vaqt ichida 325 km masofosani o'tishi kerak, shu yo'lning $\frac{1}{18}$ qismini o'tgandan keyin u 24 minut ushlanib qoldi. Keyin muddatida manzilga yetib borish uchun tezligini soatiga 10 km oshirdi. Teplovozning tezligini toping?

Javobi: 75 *km/s.*

6-masala. Tomonlari 12 m va 10 m bo'lgan to'rtburchak shakldagi maydon o'rtasiga chetlari maydon chetlaridan bir xil masofada yotadigan va yuzi 8 m2 ga teng bo'lgan gulxona ajratish kerak. Gulxonaning cheti maydon chetidan qanday masofada yotishi kerak?

Javobi: 4 m oraliqdagi masofa.

7-masala. 160 km masofani avtomashina 3 soatda bosib o'tadi. Yo'lning 75% asfalt qilingan, qolgan qismiga esa tosh yotqizilgan. Mashinaning tosh yo'ldagi tezligi asfalt yo'ldagi tezligiga qaraganda 20 *km/s* kam bo'lsa, u asfalt yo'lda qanday tezlik bilan yurgan?

Javobi: 60 *km/s*, mashinaning asfalt yo'ldagi tezligi.
40 *km/s*, mashinaning tosh yo'ldagi tezligi.

8-masala. Rejada belgilangan muddatda hosilni yig'ib olish uchun xo'jalik ikkita brigada ajratdi. 400 gektarli uchastkada ishlagan birinchi brigada topshiriqni muddatidan ikki kun oldin bajardi. Ikkinchi brigada esa 900 gektarli uchastkada ishlab, topshiriqni muddatidan 2 kun keyin bajardi. Agar birinchi brigada ikkinchi brigada necha kun ishlagan bo'lsa, shuncha kun, ikkinchi brigada necha kun birinchi brigada ishlagan bo'lsa, shuncha kun ishlaganda edi, ikkala brigada teng miqdorda hosil yig'ar edi. Reja bo'yicha hosil necha kunda yig'ib olinishini va har qaysi brigadaning kundalik ish unumini toping?

Javobi: 8-birinchi brigadaning ishlagan kuni, 12-ikkinchi brigadani ishlagan kuni.

9- masala. Oralari 24 km bo'lgan A va B punktlardan ikki avtomobil bir vaqtda bir-biriga qarab yo'lga chiqdi. A punktdan kelayotgan avtomobil uchrashuvdan 16 minut keyin B punktga yetib keldi, ikkinchi avtomobil esa A punktga 4 minutdan keyin keldi. Avtomobillarning tezliklarini toping?

Javobi: 60 *km/s* A dan chiqqan avtomobilning tezligi,
120 *km/s* B dan chiqqan avtomobilning tezligi.

10-masala. Hovuzga ikki jo'mrakdan suv keladi. Oldin birinchi jo'mrak ochib qo'yildi, u ikkinchi jo'mrakning yolg'iz o'zi ishlaganda hovuzni qancha vaqtda to'ldirsa, shu vaqtning uchdan biricha vaqt ochiq turdi. So'ngra, ikkinchi jo'mrak birinchi jo'mrak yolg'iz o'zi hovuzni qancha vaqtda to'ldirsa, shu vaqtning uchdan biricha ochiq turdi. Shundan keyin hovuzning qismi suvga to'ldi. Agar ikkala jo'mrak baravar ochiq turganda hovuz 3 soat-u, 36 minutda to'lsa, hovuzni to'ldirish uchun har qaysi jo'mrakning yolg'iz o'ziga qancha vaqt kerak bo'lishni hisoblang.

Javobi: Jo'mraklarning biri hovuzni 9 soatda, ikkinchisi 6 soatda to'ldiradi.

11- masala. Sof spirt to'ldirilgan bakdan undagi spirtning bir qismini quyib olindi va uning o'rniga shuncha suv quyib qo'yildi. So'ngra bakdan yana o'shancha litr aralashma quyib olindi, shundan keyin bakda 49 litr sof spirt qoldi. Bakning sig'imi 64 l. Bakdan birinchi safar qancha va ikkinchi safar qancha spirt quyib olingan?

Javobi: 56 litr, 7 litr.

12- masala. Kompyterda ishlovchi o'ziga topshirilgan ishni har kuni belgilangan normadan 2 bet ortiq bossa, ishni muddatidan 3 kun ilgari tugatadi. Agar normadan 4 betdan ortiq bossa muddatidan 5 kun ilgari tugatadi. U necha bet ko'chirishi va qancha vaqtda ko'chirishi kerak?

Javobi: Mashinkada bosiladigan ish 120 bet ekan.

13- masala. Ikki ishchiga bir qancha bir xil detallar tayyorlash topshirildi. Birinchi ishchi 7 soat, ikkinchisi 4 soat ishlagandan keyin butun ishning $\frac{5}{9}$ qismini tamomlangani ma'lum bo'ldi. Ular birgalikda yana 4 soat ishlagandan keyin butun ishning $\frac{1}{18}$ qismi qolganini aniqlashdi. Bu ishni har qaysi ishchi yolg'iz o'zi ishlasa, necha soatda tamomlar edi?

Javobi: 18 soat, 24 soat.

14- masala. Paraxodga ko'tarma jo'mrak bilan yuk ortildi. Oldin quvvati bir xil bo'lgan 4 ta jo'mrak ishladi. Ular 2 soat ishlagandan keyin ularga yana kamroq quvvatga ega bo'lgan 2 ta ko'tarma jo'mrak kesib qo'shildi va shundan keyin yuk ortish 3 soatda tamom bo'ldi. Agar hamma jo'mrak baravariga ishga tushirilsa, yuk ortish 4,5 soatda tugar edi. Agar bitta kuchli jo'mrak yolg'iz o'zi ishlatilsa, yuk ortishni necha soatda tamomlash mumkin bo'lar edi? Bitta kuchsiz jo'mrak yolg'iz o'zi ishlasa, ishni necha soatda tamomlar edi?

Javobi: 24 soat, 36 soat.

15- masala. Elektrostansiya qurilishda g'isht teruvchilar brigadasi ma'lum vaqtda 120 ming dona g'isht terish kerak edi. Brigada ishni muddatidan 4 kun ilgari tamomladi. Agar brigada norma bo'yicha 4 kunda qancha g'isht terishi kerak bo'lsa, 3 kunda shundan 5 ming dona ortiq g'isht tergani ma'lum bo'lsa, har kungi g'isht terish normasi qancha bo'lgan va brigada haqiqatda kuniga qanchadan g'isht tergan?

Javobi: 10 ming dona — norma bo'yicha teriladigan kun,

15 ming dona — haqiqatda terilgandagi sarf qilingan kun.

16- masala. Quvvatlari turlicha bo'lgan ikki traktor birga ishlab xo'jalik yerini 8 kunda haydab bo'ldi. Dastlab dalaning yarmini bir traktor yolg'iz o'zi haydab, keyin ikkala traktor birga ishlasa, hamma ish 10 kunda tugar edi. Dalani har qaysi traktor yolg'iz o'zi necha kunda hayday olar edi?

Javobi: Birinchi traktor bilan dalani 12 kunda,

Ikkinchi traktor bilan esa 24 kunda.

17- masala. Ikki ayol bozorga 100 dona tuxum olib kelishdi. Ikkala ayol tuxumlarni turli narx bilan sotib, barobar miqdorda pul to'lashdi. Agar birinchi ayoldagi tuxumlar ikkinchisidagicha bo'lsa, u 7,2 so'mlik tuxum sotgan bo'lar edi, agar ikkinchi ayoldagi tuxumlar birinchisidagicha bo'lsa, u 3,2 so'mlik tuxum sotgan bo'lar edi. Har qaysi ayol bozorga nechta dona tuxum oborgan?

Javobi: 60 dona, 40 dona.

18- masala. Aravaning oldingi g'ildiragi 18 m masofada, keyingi g'ildirakdan 10 marta ortiq aylanadi. Agar oldingi g'ildirak aylanasini 6 dm orttirib, keyingi g'ildirak aylanasi 6 dm kamaytirilsa, shuncha masofada oldingi g'ildirak keyingisidan 4 ta ortiq aylanadi. Har qaysi g'ildirak aylanasining uzunligini toping.

Javobi: 12 dm oldinti g'ildirak, 36 dm g'ildirak aylanasi uzunligi.

19- masala. Bir qotishmada 1:2 nisbatda ikki xil metall bor. Ikkinchi qotishmada esa shu metallar 2:3 kabi nisbatda. Tarkibida o'sha metallar 17:27 kabi nisbatda bo'lgan uchinchi bir qotishma hosil qilish uchun shu qotishmalarning har biridan qancha qism olish kerak?

Javobi: birinchi qotishmaning 9 qismiga, ikkinchi qotishmadan 35 qism olish kerak.

20- masala. Ikki ishchining ikkinchisi birinchisidan 1,5 kun keyin ishga tushib, ular bir ishni 7 kunda tamomlay oladilar. Agar bu ishni har qaysi ishchi yolg'iz o'zi ishlasa, birinchi ishchi ikkinchisiga qaraganda 3 kun ortiq ishlashiga to'g'ri keladi. Har qaysi ishchi yolg'iz o'zi bu ishni necha kunda tamomlaydi?

Javobi: birinchi ishchi ishni 14 kunda, ikkinchi ishchi 11 kunda tamomlaydi.

MUSTAQIL YECHISH UCHUN MASALALAR

21-masala. Velosipedchi 30 km yo'l yurishi kerak edi. Velosipedchi tayinlangan vaqtdan 3 minut kech yo'lga chiqib, 1 km/s ortiq tezlik bilan yurdi va boradigan joyiga o'z vaqtida yetib keldi. Velosipedchining tezligini toping?

Javobi: 25 km/s.

22-masala. Ikki stansiya orasidagi masofa 96 km. Bu masofani birinchi poezd ikkinchi poezddan 40 minut tez o'tadi. Birinchi poezdning tezligi ikkinchi poezdning tezligidan 12 km/s ortiq bo'lsa, ikkala poezdning tezligini toping?

Javobi: Birinchi poezd tezligi 48 km/s,
ikkinchi poezd tezligi 36 km/s.

23-masala. Ikki yo'lovchi bir vaqtda bir-biriga qarab *A* va *B* shaharlardan yo'lga chiqdi. Birinchi yo'lovchi ikkinchisidan bir soatda 2 km/s ortiq yo'l bosadi va u ikkinchi yo'lovchi *A* shaharga bormasdan bir soat oldin *B* shaharga yetib boradi. *A* va *B* shaharlar orasidagi masofa 24 km. Har qaysi yo'lovchi bir soatda necha kilometr yo'l bosadi?

Javobi: 6 km va 8 km.

24-masala. *A* va *B* shaharlar orasidagi masofa 200 km. *A* shahardan *B* shahargacha bir-biriga qarab bir vaqtda ikki avtomobil yo'lga chiqdi. Birinchi avtomobil ikkinchi avtomobilga qaraganda 20 km tez yurdi va ikkinchi avtomobilga qaraganda 50 minut oldin yetib keldi. Har qaysi avtomobilning tezligini toping.

Javobi: 80 km/s va 60 km/s.

25-masala. Ikki pristan orasidagi masofa 60 km. Motorli qayiq bu masofani oqim bo'yicha oqimga qarshi suzganidan ketgan vaqtga qaraganda 50 minut tez suzib o'tadi. Agar daryo oqimining tezligi soatiga 3 km bo'lsa, motorli qayiqning tezligini toping.

Javobi: 21 km/s.

26-masala. Ikki pristan orasidagi masofa 154 km. Bu pristanlarning birinchisidan ikkinchisiga qarab paraxod yo'lga chiqdi. Paraxod ikkinchi pristanga borib, 45 minut to'xtab turdi va yana yo'lga chiqqan joyiga 18,75 soatdan keyin qaytib keldi. Agar paraxodning turg'un suvdagi tezligi soatiga 18 km bo'lsa, daryo oqimining tezligini toping.

Javobi: 4 km/s.

27-masala. Paxta terimida birinchi brigada 6 soat ishladi, shundan so'ng yana bir brigada kelib qo'shildi. Ikki brigada birgalikda topshiriqni 4 soatda tugatishdi. Agar birinchi brigada berilgan uchastkadagi hosilni bir o'zi terib olishi uchun ikkinchi brigada yolg'iz o'zi ishlaganiga qaraganda 3 soat ortiq vaqt talab qilinsa, har qaysi brigadaning yolg'iz o'zi uchastkadagi hosilni necha soatda yig'ib oladi?

Javobi: birinchi brigada 15 kunda, ikkinchi brigada 12 kunda.

28-masala. Ikkita stanok birgalikda 9 soat-u 36 minutda ishni tugallaydi. Agar bitta stanok o'zi ishlasa, butun ishni bajarish uchun ikkinchiga qaraganda

8 soat ortiq vaqt talab qiladi. Har bir stanok alohida ishlaganda butun ishni necha soatda tugallaydi?

Javobi: 16 soat, 24 soat.

29- masala. Ikki g'isht teruvchi ma'lum bir ishni birgalikda ishlab 4 soatda bajaradi. Agar ishchi yolg'iz o'zi ishlasa va ishning yarmini bajarsa, so'ngra ikkinchi ishchi ishning qolgan yarmini bajarsa u holda butun ishni bajarish uchun ularga 9 soat kerak bo'ladi. Butun ishni har bir ishchi qancha vaqtda bajaradi?

Javobi: 12 kun va 6 kun.

30- masala. Ikki payvandchı ma'lum bir ishni birgalikda ishlab 4 kunda tugata oladilar. Agar bulardan biri yolg'iz o'zi 3 kun ishlagandan keyin, ikkinchisi kelib qo'shilsa, ular birgalikda topshiriqni 5 kunda bajaradilar. Payvandchilarning har biri topshiriqni necha kunda bajaradi?

Javobi: 6 kun va 12 kun.

31- masala. 300 ishchini jo'natish uchun bir necha avtobus chaqirilgan edi, ammo belgilanganidan ikkita avtobus kam keldi, shuning uchun har qaysi avtobusga mo'ljallanganidan 5 kishi ortiq o'tqizildi. Ishchilarni jo'natish uchun nechta avtobus chaqirilgan edi?

Javobi: 12 ta.

32-masala. Tez yurar poyezd passajir poyezdiga qaraganda soatiga 10 km ortiq yuradi. Tez yurar poezdning 210 km ni o'tishi uchun ketkazgan vaqti passajir poezdining 240 km ni o'tishi uchun ketgan vaqtdan bir soat kam bo'lsa, tez yurar poezdning tezligini toping.

Javobi: tez yurar poezd tezligi 70 km/s.

33-masala. Tajriba uchastkasida ekilganiga qaraganda 14 kg don ortiq yig'ib olindi. Yig'ib olingan donni yana ekildi va birinchi galdagi olingan hosil qancha bo'lsa, shuncha marta hosil olindi, hammasi bo'lib 128 kg don yigib olindi. Tajriba uchastkasiga birinchi galda qancha don ekilgan?

Javobi: 98 kg.

32-masala. Ikki pristan orasidagi masofa daryo bo'yicha 50 km. Katerda bu masofani biridan ikkinchisiga borib, u yerda 30 minut to'xtab yana birinchisiga qaytib kelishi uchun 5 soat vaqt sarf qilindi. Daryo oqimining tezligi 2,5 km bo'lsa, katerning turg'un suvdagi tezligini toping.

Javobi: 22,5 km/s.

33-masala. Ikki avtomashina birgalikda ishlab ma'lum yukni 15 soatda tashib bo'ladi. Birinchi avtomobil ikkinchisidan 6 soat kam ishlab yukning 40% ni tashidi, qolgan yukni 2-avtomobil tashigan bo'lsa, har qaysi avtomobil necha soat ishlagan?

Javobi: 30 soat, 36 soat.

34-masala. Oralaridagi masofa 900 km bo'lgan ikki stansiyadan birbiriga qarab ikki poezd yo'lga chiqdi. Bu poyezdlar yo'lning o'rtasida uchrashishi kerak edi. Agar bu poyezdlardan birining tezligi ikkinchisidan

5 km/soat ortiq bo'lsa u belgilangan masofaga ikkinchisidan bir soat oldin keladi. Har bir poyezdning tezligini toping.

Javobi: 45 km/soat birinchi poyezd tezligi, 50 km/soat ikkinchi poyezd tezligi.

35-masala. Avtomashina 160 km kesik yo'lni 3 soatda o'tadi. Bu masofaning 75% asfaltlangan bo'lib, qolgan qismi tosh yo'ldan iborat. Agar mashinaning asfalt yo'lidagi tezligi tosh yo'lidagi tezligidan soatiga 20 km ortiq bo'lsa, mashina asfalt yo'lda qanday tezlik bilan yurgan?

Javobi: 60 km/soat asfalt yo'ldagi tezlik.

36-masala. Uch idishga suv quyilgan. Agar bir idishdagi suvning 1/3 qismini ikkinchi idishga quyib, so'ngra ikkinchi idishda bo'lgan suvning 1/4 qismini uchinchi idishga quyib, nihoyat uchinchi idishda bo'lgan suvning 1/10 qismini birinchi idishga quyilsa, har bir idishda 9 litrdan suv bo'ladi. Har qaysi idishda qancha suv bor edi?

Javobi: 12 l, 8 l, 7 l.

37-masala. Oralaridagi masofa 650 km bo'lgan ikki shahardan ikki poyezd bir-biriga qarab yo'lga chiqdi. Agar poyezdlar bir vaqtda jo'nab ketgan bo'lsa, 10 soatdan keyin uchrashadi. Agar ikkinchi poyezd birinchidan 4 soat 20 minut oldin yo'lga chiqsa, birinchi poyezd yo'lga chiqqanidan 8 soat keyin uchrashadi. Har qaysi poyezdning o'rtacha tezligini toping.

Javobi: 35 km/soat birinchi poyezd tezligi.
30 km/soat ikkinchi poyezd tezligi.

38-masala. Ikki shahar orasidagi masofa daryo yo'li bilan 80 km. Paraxod bu yo'lni bir boshidan ikkinchi boshiga 9 soat-u 20 minutda borib keladi. Daryo oqimining tezligini soatiga 4 km deb hisoblab, paraxodning turg'un suvdagi tezligini toping.

Javobi: 20 km/s paraxod poyezd tezligi 60 km/s.

20-§. Matematika darslarida tengsizliklarni o'qitish metodikasi

Hozirgi ta'lim standartiga ko'ra tengsizlik tushunchasi boshlang'ich sinf matematika darslarida o'quvchilarga sonlarni taqqoslash ularning miqdoriy munosabatlarini ochib berish maqsadida katta «>» yoki kichik «<» belgilar bilan tanishtirish orqali amalga oshiriladi. Ma'lumki, agar ikkita son yoki ikki ifodalarning qiymatlari o'zaro teng bo'lmasa, ular orasiga tengsizlik belgisi qo'yiladi.

Boshlang'ich sinf matematika darslarida tengsizlik bilan tanishtirish masalasi sonlarni nomerlash va ularni taqqoslash orqali tengsizlik tushunchalari keltirib chiqariladi. Masalan, 10 ichidagi raqamlarni o'rgatilgandan keyin u yerdagi har bir raqamning miqdoriy qiymati o'zidan avvalgisidan bir birlikka ortiqdir. Shuning uchun ham ikki katta bir, besh katta olti, to'qqiz katta sakkiz kabi yozuvlarni yozishimiz mumkin. Bu degan so'z o'quvchilarga ikki katta bir degani $1+1<1$, $2+1<2$, $3+1<3$ yozuvlar orqali o'quvchilarga tengsizlikning ma'nosini ochib beriladi.

To'rtinchi sinfda esa sonli ifodalarning tengsizligi ko'rsatiladi. Masalan, $5+3>5+2$, $18:6+9>2\cdot 3$ va hokazo.

Oltinchi sinfdan boshlab, tengsizlikka quyidagicha ta'rif beriladi.

Ta'rif. a miqdordan b miqdorni ayirganda ayirma miqdor musbat (manfiy) bo'lsa, a holda b miqdor miqdordan katta (kichik) deyiladi va ular quyidagicha yoziladi $a-b>0$ $(a-b<0)$ bulardan $a>b$ $(a<b)$ kelib chiqadi. Bu belgilashlarga ko'ra $a>b$ $(a<b)$ lar ***sonli tengsizliklar*** deyiladi.

Yettinchi sinfda materiallaridagi tenglamalarni yechish jarayonida o'quvchilarni tengsizliklarning quyidagi asosiy xossalari bilan tanishtirish lozim bo'ladi.

a) tranzitivlik xossasi, agar $a>b$ va $b>c$ bo'lsa, $a>c$ bo'ladi;

b) $a>b$ va $c>d$ bo'lsa, $a+c>b+d$ bo'ladi;

d) $a>b$ bo'lsa, $a+m>b+m$;

e) $a>b$ va $m>0$ bo'lsa, $am>bm$;

f) $a>b$ va $m<0$ bo'lsa, $am<bm$.

Bu xossalarning hammasini sonli misollar ustida isbotsiz «chiqarish» mumkin, lekin ularning kelgusida (X sinfda) isbotlanishini aytib o'tish lozim.

Masalan «d» xossani quyidagicha ko'rsatish mumkin:

$20>15$tengsizlikning ikkila qismiga 3 tadan qo'shsak, $23>18$ chiqadi, agar -3 tadan qo'shsak $17>12$ chiqadi. Bu xossani ko'rib o'tgandan keyin, undan kelib chiqadigan natijaga ham to'xtalish mumkin. Shunga o'xshash bir necha misol ko'rib o'tiladi:

$$\begin{array}{r} 15+3>13 \\ -\quad 3\quad 3 \\ \hline 15>13-3 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 16-4>6 \\ +\quad 4\quad 4 \\ \hline 16>6+4 \end{array}$$

Xuddi tenglamadagi singari tengsizlikda ham son yoki ifoda tengsizlikning bir tomonidan ikkinchi tomoniga teskari ishora bilan o'tishini o'quvchilarga tushuntirish lozim bo'ladi. Yuqoridagi xossalar o'rgatilgandan keyin birinchi darajali bir noma'lumli tengsizliklarni yechish ko'rsatiladi, ya'ni yoki bunda $a\neq 0$. Xususiy holda $4x>8$, $5x>10$, $2x<6$, yoki $7x<6$, $7x<21$ kabi misollar orqali tarkibida noma'lum harf bo'lgan tengsizliklarni yechish o'rgatiladi. Bu ko'rinishdagi tengsizliklarni yechish degan so'z noma'lumning bu tengsizliklarni sonli to'g'ri tengsizlikka aylantiradigan qiymatlarini topish deganidir. $4x > 8$, $2x < 6$ ko'rinishdagi tengsizliklarning yechimi $x > 2$ va $x < 3$ bo'ladi. Shu bilan birga noma'lumning sanoqsiz ko'p son qiymatlari tengsizlikning yechimlari bo'lishini o'quvchilarga grafik yordamida ko'rsatish maqsadga muvofiqdir.

$4x > 8$ tengsizlik uchun 2 soni noma'lum qiymatlarning quyi chegarasi, $2x < 6$ tengsizlik uchun 3 soni noma'lum qiymatlarning yuqori chegarasi bo'lishini o'quvchilarga grafik nuqtayi nazaridan ko'rsatish maqsadga muvofiqdir. Yuqoridagi misollardan ko'rinadiki, tengsizlikni yechish tengsizlikning barcha qiymatlar to'plamini topishdan iboratdir.

Tengsizliklarning xossalarini o'rganish jarayonida tengsizlikning har ikki tomoniga bir xil musbat son qo'shilsa, ayrilsa, ko'paytirilsa va bo'linsa tengsizlikning belgisi o'zgarmaydi. Tengsizlikning har ikki tomonini manfiy songa ko'paytirilsa yoki bo'linsa tengsizlik belgisi teskarisiga almashadi.

Masalan,

$5x > 6,\qquad 5x-4>6-4,\qquad 5x:6>6:6,$

$5x+5>6+5,\qquad 5x\cdot 2>6\cdot 2,\qquad 10x>12.$

$15x>20,\qquad 15x:(-5)>20:(-5),\qquad -3x>-4,\qquad 3x<4,$

$15x\cdot(-2)>20\cdot(-2),\qquad -30x>-40,\qquad 30x<40.$

Ta'rif. $ax^2+bx+c>0$ yoki $ax^2+bx+c<0$ ko'rinishdagi tengsizliklar ikkinchi darajali tengsizliklar deyiladi, bunda $a\neq 0$.

Bunday tengsizliklarni yechish kvadrat uch hadning ishorasini tekshirish orqali amalga oshiriladi. O'qituvchi bu yerda o'quvchilarga kvadrat uch haddan to'la kvadrat ajratish hamda ana shu kvadrat uch hadning ishorasi diskreminantni tekshirish orqali amalga oshirilishni ko'rsatib berish maqsadga muvofiqdir, ya'ni:

1) $D=b^2-4ac>0$ bo'lsa, kvadrat uch had haqiqiy ikkita ildizga ega. U holda $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ bo'ladi.

a) $x<x_1$ bo'lsin, u holda $x-x_1<0$ va $x<x_2$da $x-x_2<0$ bo'ladi, shuning uchun $a>0$ bo'lsa, $a(x-x_1)(x-x_2)>0$ bo'ladi.

b) $x>x_1$ bo'lsin, u holda $x-x_1>0$ va $x<x_2$da $x-x_2<0$ bo'ladi, shuning uchun $a>0$ bo'lsa, $a(x-x_1)(x-x_2)<0$ bo'ladi.

d) $x < x_1$ bo‘lsin, u holda $x - x_1 < 0$ va $x < x_2$ da $x - x_2 > 0$ bo‘ladi, shuning uchun $a > 0$ bo‘lsa, $a(x - x_1)(x - x_2) < 0$ bo‘ladi.

e) $x > x_1$ bo‘lsin, u holda $x - x_1 > 0$ va $x > x_2$ da $x - x_2 > 0$ bo‘ladi, shuning uchun $a > 0$ bo‘lsa, $a(x - x_1)(x - x_2) > 0$ bo‘ladi.

Misol. $x^2 - 3x - 4 > 0$ tengsizlikni yeching.

Yechish: $a = 1$, $b = -3$, $c = -4$. Bu tengsizlikning chap tomonida turgan kvadrat uch hadning yechimlari topiladi, ya’ni $x^2 - 3x - 4 = 0$. Tenglamaning yechimlari $x_1 = -1$, $x_2 = 4$. U holda bu tengsizlikning ko‘rinishi $(x+1)(x-4) > 0$ bo‘ladi.

1) $x + 1 > 0$ va $x - 4 > 0$ bo‘ladi, ulardan $x > -1$, $x > 4$ yechimlar hosil qilinadi. Bu holda $x > 4$ yechim bo‘ladi, ya’ni $(4;\ +\infty)$.

2) $x + 1 < 0$ va $x - 4 < 0$ bo‘ladi, ulardan $x < -1$, $x < 4$ yechimlarni hosil qilinadi. Bu holda $x < -1$ yechim bo‘ladi, ya’ni $(-\infty;\ -1)$.

Javobi: $(-\infty; -1) \cup (4;\ +\infty)$.

2. $D = b^2 - 4ac < 0$ bo‘lsa, kvadrat uch had haqiqiy ildizga ega emas.

3. $D = b^2 - 4ac = 0$ bo‘lsa, kvadrat uch had $a > 0$ va $a < 0$ bo‘lgan hollar uchun haqiqiy bitta ildizlarga ega, ammo tengsizlik yechimining bo‘lganda qanoatlantirmaydi.

Misol. $-x^2 + 4x - 4 > 0$ tengsizlikni yeching.

Yechish: $a = -1$, $b = 4$, $c = -4$, $a < 0$. Bu tengsizlikning chap tomonida turgan kvadrat uch hadning yechimlari topiladi, ya’ni $(-1) \cdot (x-2)^2 = 0$. Tenglamaning bitta yechimi bor. $x = 2$. U holda bu tengsizlikning ko‘rinishi $(-1) \cdot (x-2)^2 > 0$ bo‘ladi. Bundan $-(x-2)^2 > 0$ ekani ma’lum, lekin chap tomonda turgan tenglamaning qiymati manfiy bo‘ladi. Manfiy son noldan katta emas. Shuning uchun, $a < 0$ da tengsizlikning yechimi mavjud emas.

Takrorlash uchun savollar

1. Tenglama tushunchasiga ta’rif bering.

2. Tenglama ildizi deganda nimani tushunasiz?

3. *Qanday tenglik ayniyat deyiladi?*
4. *Qanday tenglama chiziqli tenglama deyiladi?*
5. *Parametrik kasr ratsional tenglamani tushuntirib bering.*
6. *Absolut miqdor belgisi qatnashgan tenglamani tushuntirib bering.*
7 *Kvadrat uchhaddan to'la kvadrat ajratib bering.*
8. *To'la va keltirilgan kvadrat tenglamalarning farqini aytib bering.*
9. *Kvadrat tenglama ildizlari qanday topiladi?*
10. *Viyet teoremasini aytib bering.*
11. *Kvadrat tenglamaga keltirib yechiladigan tenglamalarning turlarini ko'rsating.*
12. *Qanday tenglama irratsional tenglama deyiladi?*
13. *Parametrli irratsional tenglama qanday yechilishini ko'rsatib bering.*
14. *Irratsional tenglamalar sistemasi qanday yechiladi?*
15. *Qanday tenglama ko'rsatkichli tenglama deyiladi?*
16. *Logarifmik tenglamani ta'riflang.*
17. *Qanday tenglama parametrli ko'rsatkichli tenglama deyiladi?*
18. *Qanday tenglama parmetrli logarifmik tenglama deyiladi?*
19. *Ko'rsatkichli tenglamalar sistemasi qanday yechiladi?*
20. *Logarifmik tenglamalar sistemasi qanday yechiladi?*
21. *Ko'rsatkichli va logarifmik tenglamalarni grafik usulda yechilishini ko'rsatib bering.*
22. *Qanday tenglamalar trigonometrik tenglama deyiladi?*
23. *Parmetrik tenglamalar sistemasining yechish usullarini ko'rsatib bering.*
24. *Trigonometrik tenglamalar sistemasining yechish usullarini ko'rsatib bering.*
25. *Masala tushunchasining mazmunini aytib bering.*
26. *Masalaning sharti deganda nimani tushunasiz?*
27. *Masalaning xulosasi degandachi?*
28. *Masalalarda ko'proq qanday miqdorlarning o'zaro bog'liqlik munosabatlari bo'lishini aytib bering.*
29. *Tengsizlik tushunshasiga ta'rif bering.*
30. *Tengsizliklar yechimi deganda nimani tushunasiz?*
31. *Tenglama bilan tengsizlikning qanday farqi bor?*
32. *Tengsizlik qanday asosiy xossalarga ega?*

Tayanch iboralar

Tenglik, tenglama, ayniyat, chiziqli tenglama, parametrli tenglama, kasr chiziqli tenglama, absolut miqdor, kvadrat uchhad, to'la kvadrat, kvadrat tenglama, ildiz tushunchasi, Viyet teoremasi, irratsional tenglama, tenglamalar sistemasi, ko'rsatkichli tenglama, logarifmik tenglama, parametrli ko'rsatkichli va logarifmik tenglamalar, trigonometrik tenglamalar sistemasi, masala, masala sharti, masala xulosasi, tengsizlik, tengsizlik xossalari.

IX bob.
FUNKSIYA, INTEGRAL VA DIFFERENSIAL TENGLAMA TUSHUNCHALARINI KIRITISH VA ULARNI O‘RGATISH METODIKASI

1-§. Funksiya tushunchasini kiritish va uni o‘rgatish metodikasi

Ma’lumki. matematika fani materiyadagi narsalarning fazoviy formalari va ular orasidagi miqdoriy munosabatlarni o‘rgatadi. Ana shu materiyadagi miqdorlarni nisbiy holatda olimlar tomonidan o‘zgarmas va o‘zgaruvchi miqdorlarga ajratilgan. O‘zgarmas miqdorlarni *a, b, c*, ..., o‘zgaruvchi miqdorlarni esa harflar bilan ular orasidagi miqdoriy munosabatlarni matematik belgilar orqali ifodalash XVI asrning oxirida matematika fanini turli yo‘nalishlari bilan shug‘ullangan R. Dekart, I. Nyuton (1642—1727), G. Leybnets (1646—1716), P. Ferma (1601—1665), N.I. Lobochevskiy (1792—1856), L. Dirixle (1805—1859) kabi olimlar tomonidan yozilgan asarlarda qo‘llanilgan.

Funksiya tushunchasiga birinchi marta L. Eyler tomonidan ta’rif berilgan, so‘ngra N.I. Lobochevskiy va L. Dirixle kabi olimlar tomonidan har tomonlama mukammal bo‘lgan hozirda biz ishlatib kelayotgan funksiyaning ta’rifi berilgan. Funksiya degan so‘z lotincha «*functio*» so‘zidan olingan bo‘lib, uning lug‘aviy ma’nosi «faoliyat yoki moslik, jo‘natish» bo‘lib funksiya so‘zini birinchi bo‘lib G.Leybnets 1692-yili o‘z ilmiy ishlarida qo‘llagan.

Funksiya tushunchasini maktab matematika kursida kiritishni ikki davrga bo‘lish mumkin. Birinchi davri V sinfdan boshlab funksiya va grafiklar degan mavzugacha bo‘lgan davr. Bu davr ichida o‘qituvchi o‘quvchilarga sonning nisbati, to‘g‘ri va teskari proporsional miqdorlar, Dekart koordinata tekisligi kabi tushunchalarni o‘rganish orqali o‘quvchilarda funksional bog‘liqlik tushunchalari shakllantiriladi. XVIII asrga kelib o‘zgaruvchi miqdor va koordinatalar metodi degan tushunchalar R.Dekart tomonidan kiritildi.

VI sinf. Sonli ifodalarni harfiy ifodalar bilan almashtirish algebra darslarida «To‘g‘ri va teskari proporsional miqdorlar», «Algebraik ifodaning son qiymatini topish», «Amallarda berilganlar bilan amal natijalari orasidagi bog‘lanish», «Temperatura va tekis harakatning grafigi» mavzularini o'tishda o'quvchilarni funksional bog'lanishlarga tayyorlaydigan tushunchalarni rivojlantirib boriladi. Yuqoridagi mavzularning har birini o'tishda o'quvchilarni funksional bog'lanishlarga ko'pgina ishlar qilish mumkin va lozim. Masalan, algebraik ifodaning son qiymatini o'tayotganda o'quvchilardan quyidagi jadavalni to'ldirish va quyidagi so'roqlarga javob berishni talab etish maqsadga muvofiqdir.

x	1	2	3	4	5
$\frac{1}{x}$					

1. $\frac{1}{x}$ algebraik ifoda x ning har qanday qiymatida ham ma'noga egami?

2. x o'rniga har xil sonlar qo'yilsa, $\frac{1}{x}$ qanday qiymatlarga ega bo'ladi?

3. x ga berilgan qiymatlar ortib boradimi yoki kamayib boradimi?

4. x ning qiymatlari ortgan sari algebraik ifoda ($\frac{1}{x}$) ning qiymatlari qanday o'rgaradi?

O'quvchilar bu so'roqlarga javob berish bilan x ning noldan boshqa har qanday songa teng bo'la olishini, x ning qiymati o'zgarsa, $\frac{1}{x}$ ning qiymati ham o'zgarishini, x ning qiymati orta borgan sari algebraik ifoda ($\frac{1}{x}$) ning qiymati kamaya borishini aniqlaydilar.

Bunda x ning o'zgarishiga qarab $\frac{1}{x}$ ning qiymatlari ham o'zgarib boradi. Masalan, to'g'ri to'rtburchakning perimetri uning tomonlarini uzunligiga bog'liqdir.

Agar to'g'ri to'rtburchakning tomonlari ortsa, uning perimetri ham ortib boradi. Yuqoridagi misollarga asoslanib, quyidagicha mulohaza yuritish mumkin. To'g'ri to'rtburchakning tomonlarini x o'zgaruvchi va uning perimeter qiymatini esa y o'zgaruvchi desak, x o'zgaruvchining qiymatlari x_1, x_2 larga teng bo'lib, y o'zgaruvchining ularga mos qiymatlari y_1, y_2 bo'lganda $\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1}$ ekani kelib chiqadi. Yuqoridagilardan ko'rinadiki, agar x o'zgaruvchining qiymati bir necha marta orttirilganda o'zgaruvchining unga mos qiymati shuncha marta ortsa, y o'zgaruvchi x o'zgaruvchiga to'g'ri proporsional bog'langan bo'ladi. Bu qoidaga ko'ra to'g'ri to'rtburchakning perimetri uning tomonlariga proporsional bo'ladi. Ammo to'g'ri to'rtburchakning yuzasi uning tomonlariga proporsional emasdir. Doiraning yuzasi esa o'z radiusiga proporsionaldir, ya'ni $\frac{S_2}{S_1}=\frac{r_2}{r_1}$. Masalan, 4,5 metr gazlama uchun 18 so'm to'langan bo'lsa, 27 metr gazlama uchun necha so'm to'lanadi?

$$\frac{4,5}{27}=\frac{18}{x}, \quad 4,5x=27\cdot 18, \quad x=108.$$

1. Teskari proporsional o'zgaruvchilar. Bu mavzuni harakatga doir masala bilan tushuntirish maqsadga muvofiqdir. Avtomobil t vaqt ichida tezlik bilan S masofani o'tadi. S masofani bosib o'tish t vaqt bilan v tezlikka bog'liqdir. v tezlik ortsa, S masofani bosib o'tish uchun ketgan t vaqt kamayadi. Agar v tezlik kamaysa, S masofani bosish uchun ketadigan vaqt ko'payadi. Bunda tezlik bilan vaqt o'zaro teskari bog'lanishda bo'ladi. Agar x o'zgaruvchining qiymati bir necha marta ortganda y o'zgaruvchining qiymati ham shuncha marta kamaysa, y o'zgaruvchi x o'zgaruvchiga teskari proporsional bo'ladi. x o'zgaruvchining qiymatlari x_1, x_2 lar bo'lib, y o'zgaruvchining bularga mos qiymatlari y_1 va y_2 bo'lganda $\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_1}{y_2}$ nisbat o'rinli bo'ladi, bundan proporsiya xossasiga ko'ra $x_2y_2=x_1y_1$ kelib chiqadi.

Masala. Shirkat xo'jaligining maydonini 3 ta traktor 60 soatda hayday oladi. Xuddi shunday 12 ta traktor shu maydonni qancha vaqtda hayday oladi?

$$\frac{3}{12}=\frac{x}{60}, \quad 12x=180, \quad x=15 \quad \text{soat.}$$

To'g'ri va teskari proporsional bog'lanish tushunchalari o'rgatilgandan keyin, o'quvchilarga koordinata sistemasini quyidagicha tushuntirish maqsadga muvofiqdir.

Bunda koordinatalar sistemasi mexanik ravishda tushintiriladi, uning ahamiyati ko'rsatilmaydi. Bu yerda o'qituvchi yer sirtidagi nuqtaning o'rni, u nuqtaning koordinatalari deb ataluvchi ikki son kenglik (shimoliy yoki janubiy) va uzunlik (sharqiy yoki g'arbiy) yordami bilan aniqlanishini, bu esa kema kapitaniga kemani dengizning qaysi yerida ketayotganini aniqlashga, sahrolarda yoki muz bilan qoplangan antraktida kabi qit'alarda ekspeditsiya lageri qayerda ekanini va bu lagerning yer sirtidagi (masalan,qirg'oqdagi) boshqa obyektlardan uzoqligini aniqlash kabi ishlarda katta ahamiyatga ega ekanini tushuntirish kerak.

Kino-teatrga brogan o'quvchi kassadan sotib olgan chipta yozilgan ikki son, ya'ni qator va joy nomeri yordami bilan o'z o'rnini topib oladi.

Bu ikki son ham tomoshabinning kino zalidagi o'rnining koordinatalaridir. Chiptaga yozilgan bu ikki son tufayli har qaysi tomoshabin o'z joyiga o'tiradi. Yuqoridagi kabi misollar yordamida koordinata metodining amaliy ahamiyatini ochib berish o'quvchilarda bu mavzuga qiziqish tug'diradi va binobarin, mavzuni o'quvchilarning yaxshi o'zlashtirishlariga sabab bo'ladi.

Shuni aytib o'tish kerakki, funksiyani o'rganishga tayyorgarlik ishlari dastur materiallaridan ajralgan holda emas, balki shu materiallar bilan mustahkam bog'langan holda, bu materiallarni bayon etish jarayonida olib borilishi kerak.

Funksiya tushunchasini quyidagi masala orqali kiritish maqsadga muvofiqdir. A va B shaharlar orasidagi masofa 180 km. Mashina A shahardan B shaharga 60 km/soat tezlik bilan jo'nab ketdi. Avtomobil x soatdan keyin A shahardan qanday masofada bo'ladi? Avtomobil x soatda $60x$ km yo'l yurgan bo'ladi, u holda x soatdan keyin A shahardan $180-60x$ masofada bo'ladi. $180-60x$ masofani y desak u holda $y=180-60x$ tenglik hosil bo'ladi. Biz y masofa bilan x harakat vaqti orasidagi bog'lanishni ochib beradigan formula hosil qildik. Hosil qilingan formuladagi x o'zgaruvchi 3 dan katta bo'lmagan nomanfiy qiymatlar qabul qila oladi, chunki avtomobil 3 soatdan keyin B shaharga keladi. $y=180-60x$ tenglikdagi x ning har qanday qiymati uchun y ning unga mos qiymatini topish mumkin. Masalan, agar $x = 1$, bo'lsa, $y = 120$ agar $x=2$ bo'lsa, $y=60$, agar $x=3$ bo'lsa, $y = 0$ bo'ladi. Bu degan so'z y ning qiymati x ning qiymatiga bog'liq holda o'zgaradi, bunday bog'liqlik funksional bog'liqlik yoki funksiya deyiladi.

Ta'rif. Agar x o'zgaruvchining har bir qiymatiga biror f qonuniyatga ko'ra o'zgaruvchining yagona qiymati mos keltirilsa, u holda y o'zgaruvchi x o'zgaruvchining funksiyasi deyiladi.

x erkli o'zgaruvchi yoki argument, y erksiz o'zgaruvchi yoki funksiya deyiladi.

Erkli o'zgaruvchi x ning barcha qabul qiladigan qiymatlar to'plami funksiyaning aniqlanish sohasi deyiladi. Yuqoridagi masalada, funksiyaning aniqlanish sohasi 0 dan 3 gacha bo'lgan sonlardan iboratdir, ya'ni $0 \leq x \leq 3$.

y o‘zgaruvchining x berilgan qiymatlariga mos qiymatlari funksiyaning o‘zgarish sohasi deyiladi $0 \leq y \leq 180$.

«Funksiyalar va grafiklar» mavzularini o‘tishda funksional bog‘lanishlarni o‘rganishga tayyorgarlik davrida bayon qilingan materiallarga yakun yasalishi, bu materiallar yanada kengaytirilishi va dasturda talab etilgandek, yuqori saviyada chuqurlashtirilishi lozim.

Shuning uchun:

1. Funksiyani o‘rganishning turmushdagi ahamiyatini o‘quvchilarga aniq ochib berilishi kerak.

2. Dastur bo‘yicha « $y = kx + b$ ning grafigi to‘g‘ri chiziq» ekanini dekard koordinatalar sistemasida ko‘rsatib berish kerak.

3. Darsda funksional bog‘lanishni ifoda qiluvchi yangi pedagogik texnologiyaga doir o‘quvchilarning kuchi bilan tayyorlangan ko‘rgazmali qurollardan unumli foydalanish zarur.

4. Nima uchun $y = \frac{k}{x}$ yoki $y = ax^2$ ning grafigi siniq chiziq bo‘lmasdan, egri chiziqdan iborat ekanini o‘quvchilarga yetarli ravishda tushuntirilishi kerak.

Funksional bog‘lanishlarni o‘qishga tayyorgarlik davrida ham, «funksiyalar va grafiklar» mavzusini o‘tishda ham og‘zaki mashqlarga o‘rin berilishi kerak. Holbuki, quyidagilarga o‘xshash mashqlarni og‘zaki yechish o‘qituvchiga oz vaqt sarflagan holda yaxshi natijaga erishish imkonini beradi:

1-mashq. Sifati o‘rtacha bo‘lgan 1 kg kartoshkadan 0,136 kg kraxmal olinadi. Kartoshka og‘irligi (x *kg*) bilan undan olinadigan kraxmal og‘irligi (y *kg*) orasidagi bog‘lanishni formula yordami bilan qanday ifoda qilinadi?

2-mashq. $y = 2x^2 + 3$ funksiyaning grafigi ordinata o‘qini qanday nuqtada kesib o‘tadi?

3-mashq. Grafigi $y = 3x - 2$ funksiyaning grafigiga parallel bo‘lib, ordinata o‘qini $(0,1)$ nuqtada kesib o‘tgan funksiyani analitik formada qanday ifoda qilinadi?

4-mashq. $y = 2x^2$ funksiya grafigini koordinat o‘qlari bo‘yicha 3 birlik o‘ngga va 2 birlik yuqoriga surishdan hosil bo‘lgan parabola analitik ko‘rinishda qanday funksiyani ifoda qiladi?

2. Funksiyaning berilish usullari. Funksiya sharoitiga qarab jadval, analitik va grafik usullar bilan berilishi mumkin.

Kundalik hayotimizda uchraydigan ba’zi jarayonlarni o‘rganishda funksiyaning jadval usulida berilishidan foydalaniladi. Masalan, meteorologlar Yer sharining turli nuqtalariga tushgan yog'inlar jadvalini tuzishadi. Yer sharining ana shu turli nuqtalari bu holda argument qiymatlari rolida, yog'in miqdorlari esa funksiyaning qiymatlari ro'lida keladi. Demak, funksiya jadval usulida berilishi deganda, argumentning ma'lum tartibdagi x_1, x_2, x_3,... x_n,... qiymatlari va funksiyaning ularga mos keluvchi y_1, y_2, y_3, ... ,y_n, ... qiymatlari orasidagi funksional moslikni jadval usulida berilishini tushunamiz.

x	x_1	x_2	x_3	...	x_n	...
y	y_1	y_2	y_3	...	y_n	...

Funksiyalarning jadval usulida berilishiga misol qilib kvadratlar, kublar, kvadrat ildizlar jadvallarini ko'rsatish mumkin. Bu usuldan ko'pincha miqdorlar orasida tajribalar o'tkazishda foydalaniladi.

Koordinatalar o'qlari tekislikni to'rt qismga – choraklarga ajratadi: *I, II, III, IV.* Birinchi chorak ichida ikkala koordinataning ishoralari saqlanadi va rasmda ko'rsatilgan qiymatlarga ega bo'ladi.

x (absissalar) o'qi nuqtalari uchun ordinatalar nolga (y=0), y (ordinatalar) o'qi nuqtalari uchun absissalar nolga (x = 0) tengdir. Koordinatalar boshining ordinatasi ham, absissasi ham nolga teng.

Yuqorida ko'rsatilgan usulda x va y koordinatalar kiritilgan tekislik xy tekislik deb ataladi. Bu tekislikda x va y koordinatalarga ega bo'lgan nuqtani ba'zan bevosita (x, y) bilan belgilanadi.

Tekislikda kiritilgan x, y koordinatalarni, ularni ilk bor o'z tadqiqotlarida qo'llagan fransuz olimi R. Dekart (1596–1650) nomi bilan Dekart koordinatalari deb ataladi.

Yuqoridagi mulohazalardan ko'rinadiki tekislikning istalgan M nuqtasiga koordinatalarning yagona (x,y) jufti mos keladi va aksincha koordinatalarning har bir (x,y) juftiga tekislikning yagona M nuqtasi mos keladi. Nuqtaning koordinatalari tushunchasini kiritish nuqtaning tekislikdagi vaziyatini sonlar orqali aniqlash imkonini beradi. Koordinatalar o'qi butun tekislikni choraklar deb ataluvchi to'rt qismga bo'ladi.

Chorak	Absissaning ishorasi	Ordinataning ishorasi
I	+	+
II	–	+
III	–	–
IV	+	–

Funksiyaning grafik usulda berilishi. Bu usul funksiyani analitik usulda berish ancha qiyin bo'lgan paytda qulaydir, ya'ni ko'pgina jarayonlarni o'rganishda formulalar tilida gaplasha olmaydigan asboblardan foydalaniladi, ammo bu asboblar yordamida shunday egri chiziqlar hosil qilinadiki, bu egri chiziqlarga qarab, bir o'zgaruvchi miqdorning ikkinchi o'zgaruvchi miqdorning o'zgarishga bog'liq ravishda o'zgarish xarakteri haqida hukm chiqarish mumkin bo'ladi. Masalan, tibbiyot elekrokardigraflar keng ishlatiladi. Bu asboblar yordamida elektrokardiogrammalarni-yurak muskulida hosil bo'ladigan elektr impulslarining o'zgarishini tasvirlovchi egri chiziqlarini hosil qilish mumkin. Bunday egri chiziqlar yurakning ishlashi haqida tog'ri xullosa chiqarishga yordam beradi. Funksiyaning grafik usulda berilishidan matematikada ko'pincha funksiyaning ba'zi xossalarini chizmalar orqali ko'rsatishda foydalaniladi.

Ta'rif. $y=f(x)$ funksiyaning grafigi deb xOy teksilikdagi koordinatalari $y=f(x)$ munosabat bilan bog'langan tekislikdagi barcha $P(x,y)$ nuqtalar to'plamiga aytiladi. Funksiya grafik usulda berilganda uning grafigi ma'lum bo'lib, argumentning turli qiymatlariga mos keluvchi funksiya qiymatlari bevosita grafikdan topiladi. Endi savol tug'iladi, har qanday egri chiziq biror funksiyani ifodalaydimi? Buni aniqlash uchun Oy o'qiga parallel to'g'ri chiziqlar chiziladi, agar bu to'g'ri chiziq egri chiziq bilan kamida ikki nuqtada kesishsa, grafik funksiyani ifodalamaydi, agar bitta nuqtada kesishsa funksiyanı ifodalaydi.

Funksiyaning analitik usulda berilishi. Bunday usulda erksiz o'zgaruvchi miqdor-funksiyaning erkli o'zgaruvchi miqdor — argument bilan bog'lovchi formula ko'rsatiladi.

Formula yordamida berilgan funksiyalarni analitik usulda berilgan funksiyalar deyiladi.

Masalan, $y=x^2$, $y=kx+b$, $y=a^x$, $y=lgx$, $y=sinx$, $y=tgx$, $y=2x^3-x+4$ funksiyalar analitik usulda berilgan. Analitik usulda berilgan funksiyalarga quyidagi korinishdagi yozuv ham kiradi:

$$y=\begin{cases} agar \quad x<0 \quad \text{bo'lsa,} \quad x \\ agar \quad x\geq 0 \quad \text{bol'sa,} \quad \sin x. \end{cases}$$

Funksiyani bunday analitik usuldagi berilishida ham x ning har bir qiymatiga y ning to'la aniqlangan qiymati mos keltirilgan, bunda x ning manfiy qiymatlarida y ushbu $y=x$ formula bo'yicha, x ning manfiy bo'lmagan qiymatlarida esa $y=sin\ x$ formula bo'yicha to'piladi.

Masalan, agar $x=-2$ bo'lsa, bu holda $y=x=-2$; agar $x=\frac{\pi}{2}$ bo'lsa,

$y=\sin\frac{\pi}{2}=1$ bo'ladi.

Funksiyaning aniqlanish va o'zgarish sohalarini topishga doir misollar ko'raylik. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohasini toping:

1. $y=\frac{3}{x}$. Ma'lumki, kasr ma'noga ega bo'lishi uchun uning maxraji noldan farqli bo'lishi kerak. Demak, $x\neq 0$ yoki $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$, $y\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

2. $x=(2x-1)^{-1}$. Xuddi yuqoridagidek, muhokama yuritsak, $2x-1\neq 0$ yoki $2x\neq 1$, $x\neq\frac{1}{2}$.

Demak, aniqlanish sohasi $(-\infty;\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2};+\infty)$ dan iborat.

$y\in(-\infty;\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2};+\infty)$.

3. $x=\sqrt{3x+2}$. Kvadrat ildiz ma'noga ega bo'lishi uchun ildiz ostidagi ifoda manfiy bo'lmasligi kerak, ya'ni $3x+2\geq 0$, bunda $x\geq-\frac{2}{3}$. Demak, aniqlanish sohasi $[-\frac{2}{3},+\infty)$ dan iborat. O'zgarish sohasi esa y $[0;\infty]$.

4. $x=\frac{1}{\sqrt{4x-5}}$. Agar yuqoridagidek muhokama yuritsak, u holda $4x-5>0$ bo'ladi. Bundan $x>\frac{5}{4}$. Demak, aniqlanish sohasi $(\frac{5}{4},+\infty)$ dan iborat. $y\in(0,\infty)$.

5. $y=\lg(2x-1)$. Logarifmik funksiya faqat musbat sonlar uchun aniqlangan. Demak, $(2x-1)>0$ bo'lishi kerak. Bundan $x>\frac{1}{2}$. Demak, aniqlanish sohasi $(\frac{1}{2},+\infty)$ dan iborat. $y\in(0,\infty)$.

MUSTAQIL ISHLASH UCHUN MISOLLAR

1. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohasini toping:

a) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$; b) $y = \arcsin\dfrac{x-2}{2}$;

d) $y = \dfrac{1}{\lg(4 - x^2)}$; e) $y = \sqrt{25 - x^2} + \lg\sin x$.

Javobi: a) $(-\infty,\ 1)\cup(2,\ +\infty)$; b) $[0.4]$;

d) $(-2,\ -\sqrt{3}\ )\cup(-\sqrt{3},\ \sqrt{3}\ )\cup(-\sqrt{3},\ 2\ )$; e) $[-5,\ -\pi)\cup(0,\ \pi)$.

2. Quyidagi funksiyalarning o‘zgarish sohasini toping:

a) $y = \sqrt{16 - x^2}$; b) $y=3\cos x-1$; d) $y=3^{-x^2}$

Javobi: a) $[0,4]$; b) $[-4,2]$ v) $(0,1]$.

2-§. Sonlar ketma-ketligi va uning limitini o‘rgatish metodikasi

1. Sonlar ketma-ketlik tushunchasi

Ma’lumki, natural sonlar to‘plami tartiblangan to‘plamdir.Shuning uchun har qanday ixtiyoriy ikkita a va b natural son uchun $a<b$, $a>b$ yoki $a=b$ munosabatlardan biri o‘rinlidir. N to‘plamning bu xossasi abstrakt obyektlarni u yoki bu yo‘l vositasida N to‘plam elementlari bilan bog‘lab , sanashga imkion beradi.Agar N va R to‘plamlar berilgan bo‘lib, f- har bir natural $n\in N$ songa biror haqiqiy $x_n\in R$ sonni mos qo‘yuvchi akslantirish bo‘lsa uni matematik tilda $f{:}N\to R$ yoki $n\to x_n$ bu holda $x_n=f(n)$ kabi yoziladi. f akslantirishni quyidagicha tasvirlash mumkin: $1\to x_1,\ 2\to x_2, 3\to x_3\ ...n\to x_n\ ...$

Ta’rif. $f(n)$ o‘zgaruvchining qiymatlaridan tuzilgan $x_1,x_2,x_3...x_n$ ... to‘plam sonlar ketma-ketligi deyiladi va u $\{x_n\}$ kabi yoziladi.

Ta’rif. Agar $y=f(x)$ funksiyaning argumenti x ni qabul qiladigan qiymatlari natural sonlar to‘plamidan iborat bo‘lsa, bu holda bunday funksiyani $N=\{1,2,3,...\}$ natural argumentli funksiya deb ataladi va u quyidagicha yoziladi $y=f(n)$ yoki $y=f(N)$.

Ta’rif. Natural argumentli funksiya $y=f(n)$ ning xususiy qiymatlarining $f(1), f(2), f(3), ... , f(n)$... ketma-ketligiga cheksiz sonlar ketma-ketligi deb ataladi.

$$f(1)=x_1,\ f(2)=x_2,\ f(3)=x_3,\dots,\ f(n)=x_n\ \dots$$

Bu ta'rifdan ko'rinadiki, cheksiz sonlar ketma-ketligining har bir hadi ma'lum bir tartib nomeriga ega bo'ladi. Umuman olganda sonlar ketma-ketligi $\{a_n\}=a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots,\ a_n,\dots,\ \{x_n\}=x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dots,\ x_n,\dots$ ko'rinishlarda belgilanadi. Ketma-ketlikni tashkil qilgan sonlar shu ketma-ketlikning hadlari deyiladi. Bularga ko'ra x_1 – ketma-ketlikning birinchi hadi, x_2 – ikkinchi hadi x_n – ketma-ketlikni n chi hadi yoki umumiy hadi deb yuritiladi. Agar ketma-ketlikning n–hadi berilgan bo'lsa shu hadga ega bo'lgan ketma-ketlikni tuzish mumkin. Masalan, 1) $x_n=\dfrac{n}{n+1}$ berilgan bo'lsa, $\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4},\dfrac{4}{5}\dots$ ketma-ketlikni tuzish mumkin.

2) $x_n=aq^{n-1}$ bo'lsa, $a,\ aq,\ aq^2,\ \dots,\ aq^{n-1},\dots$ ketma-ketlikni tuzish mumkin.

Ta'rif. Tartib nomeriga ega bo'lgan sonlar to'plami sonlar ketma-ketligi deyiladi.

Sonlar ketma-ketligi uch xil bo'ladi.

1. O'suvchi ketma-ketlik.
2. Kamayuvchi ketma-ketlik.
3. Tebranuvchi ketma-ketlik.

Ta'rif. Agar ketma-ketlikning har bir hadi o'zidan avvalgi hadiga nisbatan qiymat jihatidan ortib borsa, u holda bunday ketma-ketliklar o'suvchi ketma-ketlik deyiladi.

Masalan, $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ o'suvchi ketma-ketlik; aks holda $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ kamayuvchi ketma-ketlik deyiladi.

Masalan: $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ kamayuvchi ketma-ketlik.

Ta'rif. O'smaydigan va kamaymaydigan ketma-ketliklar tebranuvchi ketma-ketliklar deyiladi.

Masalan: $\{x_n\}=(-1)^n$

$$x_0=-1;\ x_2=1;\ x_3=-1;\ x_4=1;\ \dots$$

Agar ketma-ketlikning dastlabki hadlari berilgan holda keyingi hadlarni oldingi hadlari orqali topishni ifodalaydigan qoida rekkurrent qoida deb ataladi. Masalan, $x_1=1$, $x_2=1$ $x_n=x_{n-2}+x_{n-1}$, $n\geq 3$ qoida bilan 1,1,2,3,5,8,13 ... ketma-ketlik hadlarini topishi mumkin. Bu sonlar Fibonachi sonlari deb yuritiladi.

x_n sonlar ketma-ketligining hadlar soni cheksiz bo'lsa, bu holda ketma-ketlikning barcha hadlaridan tuzilgan to'plam cheksiz yoki chekli to'plam bo'lishi mumkin. Masalan, 1,2,3...,n ... ketma-ketlik hadlaridan tuzilgan {1,2,3 ...} to'plam cheksiz, 1,-1,1,-1, ...ketma-ketlikning hadlaridan tuzilgan {-1,1} to'plam chekli to'plamdir.

2. Chegaralangan ketma-ketliklar

Biror $\{x_n\}$:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$$

ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Agar shunday o'zgarmas M son mavjud bo'lsaki, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning har bir hadi shu sondan katta bo'lmasa, ya'ni $\forall\, n\in N$ uchun $x_n\leq M$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\{x_n\}$ yuqoridan chegaralangan ketma-ketlik deyiladi.

Ta'rif. Agar shunday o'zgarmas m son mavjud bo'lsaki, ya'ni $\forall\, n\in N$ uchun

$$x_n\geq m$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\{x_n\}$ quyidan chegaralangan ketma-ketlik deyiladi.

Ta'rif. Agar ketma-ketlik ham quyidan, ham yuqoridan chegaralangan bo'lsa, ya'ni shunday o'zgarmas m va M sonlar topilsaki, $\forall\, n\in N$ uchun

$$m \leq x_n \leq M$$

tengsizliklar o'rinli bo'lsa, $\{x_n\}$ chegaralangan ketma-ketlik deyiladi.

Misollar. 1. Ushbu $x_n=1+\dfrac{1}{n^2}$;

$$1+1,\ 1+\frac{1}{4}, 1+\frac{1}{9}, \ldots, 1+\frac{1}{n^2}, \ldots$$

ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan, chunki ixtiyoriy $n\in N$ uchun

$$x_n \leq 2 \ (M=2)$$

tengsizlik o'rinli.

2. Ushbu: $x_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

$$1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \ldots, \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \ldots$$

ketma-ketlik quyidan chegaralangan, chunki $\forall\, n\in N$ uchun

$$x_n \geq -\frac{1}{4} \quad (m=-\frac{1}{4})$$

tengsizlik o'rinli.

3. Ushbu $x_n = \dfrac{n^2-1}{n^2}$ $\quad 0, \frac{3}{4}, \frac{8}{9}, \dots \frac{n^2-1}{n^2}, \dots$

ketma-ketlik chegaralangan, chunki $\forall n \in N$ uchun

$$0 \leq x_n < 1$$

tengsizlik o'rinli. Haqiqiy sonlar to'plami R ni olaylik. Agar u chekli to'plam bo'lsa, u holda uning elementlari orasida eng katta va eng kichik elelment mavjud. Agar u cheksiz to'plam bo'lsa, u holda har doim ham shunday bo'lavermaydi. Masalan, natural sonlar to'plami N da eng kichik son 1 ga teng ammo eng katta son yo'q. (a,b) interval eng kichik songa ham, eng katta songa ham ega emas. Shuning uchun aniq, quyi va yuqori tushunchalarga quyidagicha ta'rif beriladi.

Ta'rif. M chekli son uchun quyidagi ikki shart bajarilsa u holda M soni $\forall x_n \in P$ to'plamning aniq yuqori chegarasi deyiladi va $\sup\{x_n\}=M$ kabi yoziladi.

1. $\forall x_n \in R$ uchun $x_n \leq M$ tengsizlik o'rinli bo'lsa.
2. $\forall\ \varepsilon > 0$ uchun shunday $\exists N\ n > N(\varepsilon)$ bo'ganda $M - \varepsilon < x_N \leq M$.

Ta'rif. m chekli son uchun quyidagi ikki shart bajarilsa u holda m soni $\forall x_n \in R$ to'plamning aniq quyi chegarasi deyiladi va $\inf\{x_n\}=m$ kabi yoziladi.

1. $\forall x_n \in R$ uchun $x_n \geq m$ tengsizlik o'rinli bo'lsa.
2. $\forall \varepsilon > 0$ uchun shunday $\exists N\ n > N(\varepsilon)$ bo'ganda $m \leq x_N < m + \varepsilon$.

1- misol. $\{2-\frac{1}{n}\}$, $\{3n+3\}$ ketma-ketliklarning aniq yuqori chegaralari quyidagicha yoziladi. $\sup\{2-\frac{1}{n}\}=2$, $\sup\{3n+3\}=\infty$, $\inf\{2-\frac{1}{n}\}=1$ $\inf\{3n+3\}=6$.

2- misol. $N=\{1,2,3\dots n\}$ bo'lsa $\sup\{N\}=\infty$, $\inf\{N\}=1$ bo'ladi.

3. Monoton ketma-ketliklar

Ta'rif. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning hadlari quyidagi

$$x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots \le x_n \le \ldots \qquad (x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < \ldots)$$

tengsizliklarni qanoatlantirsa, ya'ni $\forall\, n\in N$ uchun

$$x_n \le x_{n+1}\ (x_n < x_{n+1})$$

bo'lsa, $\{x_n\}$ o'suvchi (qat'iy o'suvchi) ketma-ketlik deyiladi.

Ta'rif. *Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning hadlari quyidagi*

$$x_1 \ge x_2 \ge x_3 \ge \ldots \ge x_n \ge \ldots \qquad (x_1 > x_2 > x_3 > \ldots > x_n > \ldots)$$

tengsizliklarni qanoatlantirsa, ya'ni $\forall\, n\in N$ uchun

$$x_n \ge x_{n+1}\ (x_n > x_{n+1})$$

bo'lsa, $\{x_n\}$ kamayuvchi (qat'iy kamayuvchi) ketma-ketlik deyiladi.

O'suvchi (qat'iy o'suvchi), kamayuvchi (qat'iy kamayuvchi) ketma-ketliklar monoton ketma-ketliklar deyiladi.

Misol. Ushbu $x_n = \dfrac{n}{n+1}:\ \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \ldots, \dfrac{n}{n+1}, \ldots$

ketma-ketlikning o'suvchi ekanini ko'rsating.

Bu ketma-ketlikning

$$x_n = \frac{n}{n+1},\quad x_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$$

hadlarini olib, $x_{n+1} - x_n$ ayirmani qaraymiz:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Ravshanki, $\forall\, n\in N$ uchun $\dfrac{1}{(n+1)(n+2)} > 0.$

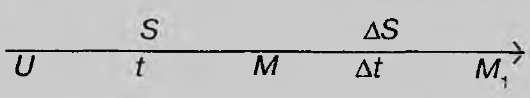
Demak, $\forall\, n\in N$ da $x_{n+1} - x_n > 0$, ya'ni $x_n < x_{n+1}$ bo'ladi. Bu esa berilgan ketma-ketlikning o'suvchi (hatto qat'iy o'suvchi) va quyidan chegaralangan ekanini bildiradi.

Ta'rif. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \Pi_0$ bo'lganda $n > n_0$ ga $|x_n - a| < \varepsilon$ o'rinli bo'lsa, u holda a soni $\{x_n\}$ ning limiti deyiladi va $\lim\limits_{n\to\infty} \{x_n\} = a$ kabi yoziladi.

3-§. Hosila va uning ustida amallar bajarish metodikasi

1. Nyuton masalasi

Masala. Moddiy nuqta to'g'ri chiziqli harakat qilib M vaziyatda bo'lganda harakatning berilgan t paytdagi ϑ tezligini toping.



Bu masalani yechish uchun quyidagicha faraz qilamiz.

Faraz qilaylik, moddiy nuqta to‘g‘ri chiziqli harakat qilib, t vaqt ichida s masofani bosib o‘tsin, ya’ni O nuqtadan M nuqtaga kelsin.

Agar t vaqtga yana Δt vaqt qo‘shilsa, Δt vaqt ichida moddiy nuqta M_1 masofaga keladi. Ma’lumki, bu yerdagi s masofa t ning funksiyasidir, ya’ni t vaqt ichida $s(t)$ masofani bosib o‘tadi. U vaqtda OM_1 orasidagi masofa esa $s(t+\Delta t)$ ga bog‘liq bo‘ladi. Agar moddiy nuqtani Δt vaqt ichida bosib o‘tgan masofasini topadigan bo‘lsak, u $\Delta S = S(t+\Delta t)-S(t)$ bo‘ladi.

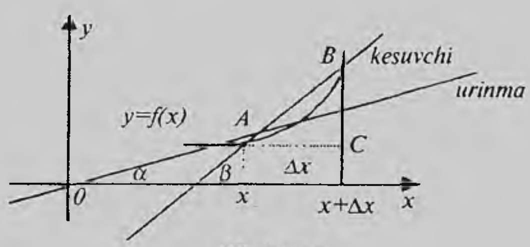
Moddiy nuqtani Δt vaqt ichida ΔS masofani bosishi uchun harakatdagi o‘rtacha tezligi fizika kursidan ma’lumki, $V_{o'rt}=\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ bo‘ladi. Nuqtaning t vaqtdagi tezligi deb, Δt vaqt oralig‘idagi ϑ o‘rtacha tezlikning Δt nolga intilgandagi limitiga aytiladi.

Shuning uchun $\dfrac{\Delta S}{\Delta t}=\dfrac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}$.

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}. \qquad (1)$$

Yuqoridagi savolning javobi (1) dagi limitni hisoblashga olib keldi.

Leybnis masalasi. Dekart koordinatalar sistemasida berilgan $y=f(x)$ egri chizig‘ining ixtiyoriy nuqtasiga o‘tkazilgan urinmaning absissa o‘qining musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan burchagining tangensini topish masalasi hosila tushunchasiga olib keladi.



27-chizma.

$$\Delta ABC \text{ dan } \frac{BC}{AC}=tg\beta \qquad tg\beta=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \qquad (2)$$

Ta’rif. $y=f(x)$ funksiyasining kesuvchisi AB ning B nuqtasini egri chiziq bo‘ylab A nuqtaga intilgandagi limitik vaziyati egri chiziqning shu nuqtasiga o‘tkazilgan urinma deb ataladi.

$\Delta x \to 0\, da\ \angle\beta \to \angle\alpha$ bu holda B nuqta egri chiziq bo‘ylab A nuqtaga intiladi:

$$tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (3)$$

Yuqoridagi qo‘yilgan masalani yechish bizni (3) dagi limitni hisoblashga olib keldi.

2. Hosilaning ta’rifi: $y=f(x)$ funksiya X sohada aniqlangan bo‘lsin. Erkli o‘zgaruvchining birorta $x=x_0$ qiymatini olib X sohadan chiqmaydigan $x_0+\Delta x$ orttirma beramiz, u holda $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ funksiya orttirmasi hosil bo‘ladi.

Ta’rif. $y=f(x)$ funksiyasini $x=x_0$ nuqtadagi funksiya orttirmasi Δy ni argument orttirmasi Δx ga bo‘lgan nisbatini $\Delta x \to 0$ dagi limiti mavjud bo‘lsa, bu limit berilgan $y=f'(x_0)$ funksiyasini $x=x_0$ nuqtadagi hosilasi deyiladi va y'_{x_0} yoki $f'_{(x_0)}$ kabi yoziladi. Umumiy holatda esa

$y'_x\ \ f'(x);\ \frac{dy}{dx}$ deb yoziladi,

$$y'_{x_0} = f'(x_0) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Bu ta’rif (1) va (3) limitlarga tatbiq qilinsa,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t} = S'_t = S'(t),$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = y'_x = f'(x).$$

Hosilasining mexanik ma’nosi

Moddiy nuqtani t vaqt ichidagi s masofani bosish uchun harakatdagi tezligini topishdan iborat.

Hosilaning geometrik ma’nosi

Egri chiziqning biror nuqtasiga o‘tkazilgan urinmani absissa o‘qining musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan burchak koeffitsiyenti tgα ni topishdan iborat.

$y-y_0=k(x-x_0)$, $k=tg\alpha=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'_x=f'(x_0)$ bularga ko'ra urinmaning burchak koeffitsiyenti tenglamasi $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ bo'ladi.

Misol. $y=x^3$ kubik parabolaning $x=1$ nuqtadagi urunmasi $f(x)=1+3(x-1)=3x-2$ tenglama bilan ifodalanadi, chunki $y'=3x^2$ ni $x=1$ nuqtadagi qiymati $y'=3$ ga teng bo'ladi.

3. Elementar funksiyalarning hosilalarini topish.

1) $y=c$; $y'=c'=0$.

2) $y=x^n$; $y'=nx^{n-1}$.

Isbot: $y+\Delta y=(x+\Delta x)^n$

$$\Delta y=(x+\Delta x)^n-x^n=x^n+nx^{n-1}\cdot\Delta x+\ldots$$

$$\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]\Delta x^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}-x^n.$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)x^{n-2}\Delta x}{1\cdot 2}+\ldots$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=n\cdot x^{n-1}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{n(n-1)x^{n-2}\Delta x}{1\cdot 2}+\ldots$$

3) $y'_x=nx^{n-1}$.

$$y=\frac{1}{x};\qquad y'_x=-\frac{1}{x^2}.$$

Isboti:
$$y+\Delta y=\frac{1}{x+\Delta x}.$$

$$\Delta y=\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}.$$

$$\Delta y=\frac{x-x-\Delta x}{x(x+\Delta x)}.$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{x^2+x\Delta x}.$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x^2+x\Delta x},\quad y'_x=-\frac{1}{x^2}.$$

4) $y=a^x$; $y'=a^x\ln a$.

Isboti: $y + \Delta y = a^{x+\Delta x}$; $\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^{x}$;

$$\Delta y = a^{x}(a^{\Delta x} - 1); \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a_x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}.$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a^{x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^{x} \ln a; \qquad y'_x = a^{x} \cdot lna.$$

5) $y = \sqrt{x}$; $y_x = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

Isboti: $y = x^{\frac{1}{2}}$; $y = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

6) $y = sinx$; $y' = \cos x$.

Isboti:

$$y+\Delta y=sin(x+\Delta x), \qquad \Delta y=sin(x+\Delta x)-\sin x,$$

$$\Delta y = 2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos(x + \frac{\Delta x}{2})$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos(x + \Delta x) = \cos x.$$

7) $y=\cos x$ $\qquad y'_x=-\sin x$

8) $y=tgx; y'_x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Isboti:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{tg(x + \Delta x) - tgx}{\Delta x} = \frac{\frac{\sin(x + \Delta x)}{\cos(x + \Delta x)} - \frac{\sin x}{\cos x}}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\sin(x + \Delta x)\cos x - \cos(x + \Delta x)\sin x}{\Delta x \cos x \cos(x + \Delta x)} = \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\cos x \cos(x + \Delta x)};$$

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\cos x \cdot \cos(x + \Delta x)} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

9) $y=ctgx$; $\quad y'_x = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$.

10) $y=\log_a x$; $\quad y'_x = \log_a e \; \dfrac{1}{x}$.

$$y'_x = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\log_a\frac{1+\frac{\Delta x}{x}}{a\frac{\Delta x}{x}} = \frac{\log_a e}{x}.$$

11) $y=a^x$; $\quad \ln y = x\ln a$.

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \ln a, \quad y' = y\ln a, \quad y' = ya^x \ln a.$$

4. Funksiyaning o‘ng va chap hosilalari

Ta’rif. Agar $\Delta x \to +0$($\Delta x \to -0$) da $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatning limiti

$$\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\left(\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right)$$

mavjud va chekli bo‘lsa, bu limit $f(x)$ funksiyasini x_0 nuqtadagi o‘ng (chap) hosilasi deb ataladi va u quyidagicha $f'(x_0+0)$, ($f'(x_0-0)$) belgilanadi.

Misol. $f(x)=|x|$ funksiyaning hosilalarini hisoblang. Bu funksiyani o‘ng limiti $f'(x_0+0) = \lim\limits_{\Delta x\to +0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 1$ ga teng. Chap limiti esa $f'(x_0-0) = \lim\limits_{\Delta x\to +0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ $= -1$ ga teng.

Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega bo‘lsa, funksiya shu nuqtada bir tomonlama limitlarga ega bo‘lib, $f'(x_0+0) = f'(x_0-0) = f'(x_0)$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Agar (x_0) atrofda uzluksiz $f(x)$ funksiyasi x_0 nuqtada $f'(x_0+0)$ va $f'(x_0-0)$ hosilalarga ega bo'lib $f'(x_0+0)=f'(x_0-0)$ tenglik o'rinli bo'lsa, funksiya shu nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lib $f'(x_0)=f'(x_0+0)=f'(x_0-0)$.

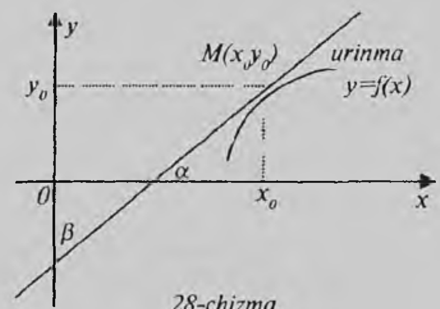
Ta'rif. Agar $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\pm\infty$ tengligi o'rinli bo'lsa u holda bu tenglik $f(x)$ funksiyasining x_0 nuqtadagi cheksiz hosilasi deyiladi.

5. Teskari funksiyaning hosilasi

$y=f(x)$ funksiyasi $x=x_0$ nuqtada aniqlangan uzluksiz bo'lib, 1-tartibli hosilaga ega bo'lsin.

Teorema: agar $y=f(x)$ funksiyasi $x=x_0$ nuqtada aniqlangan va uzluksiz bo'lib, $f'(x_0)\neq 0$ hosilaga ega bo'lsa, u holda bu funksiyaga teskari bo'lgan $x=\varphi(y)$ funksiyasi $y=y_0$ nuqtada x'_y yoki $\varphi'(y_0)$ hosilaga ega bo'lib, $x'_y=\frac{1}{y'_x}$ bo'ladi

Isboti: $x=\varphi(y)$ funksiyasi $y=y_0$ nuqtada aniqlangan va uzluksiz bo'lganligi uchun uning shu nuqtadagi orttirmasi $\Delta x=\varphi(y_0+\Delta y)-\varphi(y_0)$ bo'ladi. Tenglikning har ikki tomoni $\Delta y\pm 0$ ga bo'linsa, $\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}\times y=f(x)$ funksiyasi uzluksiz funksiya bo'lganligi uchun $\Delta y\to 0$ da $\Delta x\to 0$ shuning uchun $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$ ta'rifga ko'ra, $x'_y=\frac{1}{y'_x}$. Geometrik isboti quyidagichadir (28-chizma).



28-chizma.

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}; \qquad tg\alpha=\frac{1}{tg\beta};$$

$$tg(\frac{\pi}{2}-\beta)=tg\alpha; \qquad tg\beta=\frac{1}{tg\alpha}; \qquad tg\alpha=ctg\beta.$$

bundan $x'_y=\frac{1}{y'_x}$.

1. $y=\arcsin x$ funksiyasining hosilasini toping. Ma'lumki, bu funksiya $-1\le x\le 1$, $-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$ shu oraliqda x va y ning qiymatlari joylashgan hamda $y=\arcsin x$ funksiyaga teskari bo'lgan $x=\sin y$ funksiyasi mavjud formulaga ko'ra $x'_y=\frac{1}{y'_x}$ edi.

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. $y=\arccos x$ $\quad y'=?$

$x=\cos y$.

$$(\arccos x)'=\frac{1}{(\cos y)'}=-\frac{1}{\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. $y=\text{arctg}x$ bo'lsa, $x=\text{tg}y$ $\quad -\infty<x<\infty, -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$.

$$(arctgx)'=\frac{1}{(tgy)'}=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}}=\cos^2 y=\frac{\cos^2 y}{\cos^2 y+\sin^2 y}=\frac{1}{1+tg^2 y}=\frac{1}{1+x^2}.$$

4. $y=arcctgy$ bo'lsa $\quad x=ctgy$ bo'ladi.

$$(arcctgy)'=\frac{1}{(ctgy)'}=-\frac{1}{\frac{1}{\sin^2 y}}=-\frac{\sin^2 y}{\sin^2 y+\cos^2 y}=-\frac{1}{1+ctg^2 y}=-\frac{1}{1+x^2}.$$

QUYIDAGI FUNKSILARNING HOSILALARINI TOPING

1. $y = \arcsin\frac{1}{x}$. *Javobi:* $-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

2. $y = arcctg\sqrt{x}$. *Javobi:* $-\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$.

3. $y = \ln arctg\sqrt{x}$. *Javobi:* $y = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)arctg\sqrt{x}}$.

4. $y = \arccos\sqrt{x}$. *Javobi:* $-\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$.

MUSTAQIL ISHLASH UCHUN MISOLLAR

1. Ta'rifdan foydalanib quyidagi funksiyaning hosilalarini toping.

$$y=5x^2-3x,\quad y=\sqrt{x},\quad y=\sin 3x.$$

2. Quyidagi funksiyalarning hosilalarini ta'rif asosida toping.

$$y=\cos 2x,\quad y=tg2x,\quad y=x^3.$$

3. $y=\sqrt{x^3-1}$ funksiyasining hosilasini toping.

4. $y=2x^2-3x$ funksiyasini hosilasini ta'rifga ko'ra toping.

4-§. Hosilani hisoblash qoidalari

Elementar funksiyalarning hisoblash o'rganildi. Endigi asosiy maqsad chekli sondagi arifmetik amallar va superpozitsiyalar vositasida elementar funksiyalardan tuzilgan ixtiyoriy funksiyaning hosilasini hisoblash imkonini beruvchi qoidalar ko'rib chiqiladi.

1. Agar $u = u(x)$ funksiyasi $x = x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, u holda $y = c\cdot u(x)$ funksiyasi ham hosilaga ega bo'lib, $[c\cdot u(x)]' = c\cdot u'(x)$ bo'ladi.

Isboti: $y=c\cdot u(x)$ desak, bu funksiyani orttirmasi $y+\Delta y=c\cdot u(x+\Delta x)$ bo'ladi. Bundan $\Delta y=c\cdot u(x+\Delta x)-c\cdot u(x)$ $|:\Delta x$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = c\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} \quad \text{yoki} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = c\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Agar $\Delta x \to 0$ da $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = c \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$ hosila ta'rifiga ko'ra $y'_x = c \cdot u'(x)$.

Misol: $u=3 \cdot x^3$; $u'=(3x^3)'=3(x^3)'=3 \cdot 3x^2=9x^2$.

2. Agar $U(x)$ va $V(x)$ funksiyalari $x=x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, $U(x) \pm V(x)$ funksiya ham shu nuqtada hosilaga ega bo'lib, $[U(x) \pm V(x)]'=U'(x) \pm V'(x)$.

Isboti: $y=U(x) \pm V(x)$ funksiyaning orttirmasi

$$\Delta y=[U(x+\Delta x)-U(x)] \pm [V(x+\Delta x)-V(x)], \qquad \Delta y=\Delta U \pm \Delta V \,|: \Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta U}{\Delta x} \pm \frac{\Delta V}{\Delta x}.$$

$\Delta x \to 0$ limitga o'tsak $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta x} \pm \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta x}$.

Hosila ta'rifiga ko'ra $y'=U' \pm V'$.

3. Agar $U(x)$ va $V(x)$ funksiyalari $x=x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, ularning o'zaro ko'paytmasining hosilasi $[U(x) \cdot V(x)]'=U'(x) \cdot V(x)+V'(x) \times \times U(x)$ bo'ladi.

Isboti:

$y=U(x) \cdot V(x)$ bo'lsa, $\Delta y=U(x+\Delta x) \cdot V(x+\Delta x)-U(x) \cdot V(x)$ bo'ladi.

$$\Delta y=U(x+\Delta x) \cdot V(x+\Delta x)-U(x) \cdot V(x)+U(x+\Delta x) \cdot V(x)-U(x+\Delta x) \cdot U(x)$$

$$\Delta y=U(x+\Delta x) \cdot [V(x+\Delta x)-V(x)]+V(x)[U(x+\Delta x)-U(x)]$$

$$\Delta y=\Delta V \cdot U+V \Delta U \,|: \Delta x$$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta U}{\Delta x} \cdot V + U \cdot \frac{\Delta V}{\Delta x}$ bo'ladi, $\Delta x \to 0$ limit olinsa

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta x} \cdot V + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} \cdot U.$$

Hosila ta'rifiga ko'ra $y'=U' \cdot V+V' \cdot U$.

Agar $U(x)$ va $V(x)$ funksiyalari $x=x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa ularning o'zaro nisbatlari ham hosilaga ega bo'lib $\left\{\frac{U(x)}{V(x)}\right\}' = \frac{U'(x)V(x)-V'(x)U(x)}{V^2(x)}$ bo'ladi.

1. $y = \sqrt[3]{x}$. *Javobi:*. $\frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$.

2. $y = \arcsin^2 x$. *Javobi:* $\frac{2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

3. $y=\dfrac{1-x^2}{1-x^5}$. *Javobi:* $\dfrac{5x^4\left(1-x^2\right)-2x\left(1-x^5\right)}{\left(1-x^5\right)^2}$.

4. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)$. *Javobi:* $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$.

5. $y=\sqrt{\sin 2x+\cos 3x}$. *Javobi:* $\dfrac{2\cos 2x-3\sin 3x}{2\sqrt{\sin 2x+\cos 3x}}$.

6. $y=x\,shx$. *Javobi:* $shx+x\,chx$.

MUSTAQIL ISHLASH UCHUN MISOLLAR

1.Hosilaning qoida va formulalaridan foydalanib quyidagi funksiyalarning hosilalarini toping:

a) $y=\sqrt{x}+\dfrac{1}{x^2}-3x$. b) $y=x^5\left(2-\dfrac{x}{3}+3x^2\right)$.

2. Quyidagi funksiyalarning hosilalarini toping.

$y=5\sin x-\cos x$, $y=tgx-ctgx$, $y=x\,ctgx$, $y=x^7-e^x$, $y=e^x\cos^x$

3. Quyidagi funksiyalarning hosilalarini toping.

$y=x^x$, $y=x^{\sin}$, $y=\ln|x|$.

5-§. Integral va uning tatbiqlarini o'rgatish metodikasi

1. Biz hozirgacha biror $y=f(x)$ funksiyasi berilgan bo'lsa, bu funksiyaning hosilasini yoki differensialini hisoblashni o'rgandik. Endi hosila olish amaliga teskari bo'lgan amal tushunchasini kiritishga harakat qilamiz. Agar bizga hosilasi olingan funksiya berilgan bo'lsa, ana shu funksiyani hosilasi olingunga qadar, ya'ni uning boshlang'ich ko'rinishi qanday bo'lgan edi degan savolga javob beramiz.

Ta'rif. Agar $y=F(x)$ funksiyasining hosilasi $f(x)$ ga teng bo'lsa, ya'ni $F(x)=f(x)$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $F(x)$ funksiyasi $f(x)$ funksiya uchun boshlang'ich funksiya deyiladi.

1- misol. Agar $f(x)=x^2$ bo'lsa, uning boshlang'ich funksiyasi $F(x)=\dfrac{x^3}{3}$ bo'ladi, chunki $F'(x)=\dfrac{3x^2}{3}=x^2=f(x)$ bo'ladi.

2- misol. Agar $f(x)=\sin x$ bo'lsa, uning boshlang'ich funksiyasi $F(x)=-\cos x$ bo'ladi, chunki, $F'(x)=(-\cos x)'=\sin x=f(x)$.

3- misol. Agar $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ bo'lsa, uning boshlang'ich funksiyasi $F(x)=\arcsin x$ bo'ladi.

Yuqoridagi misollardan ko'rinadiki, agar $f(x)$ funksiyasi uchun $F(x)$ funksiyasi boshlang'ich funksiya bo'ladigan bo'lsa, u holda $F(x)+C$ funksiyasi ham boshlang'ich funksiya bo'ladi, chunki $[F(x)+C]'=f(x)$, C — o'zgarmas son. Bundan ko'rinadiki, agar $f(x)$ funksiyasining boshlang'ich funksiyasi mavjud bo'lsa bunday boshlang'ich funksiyalar cheksiz ko'p bo'lib, ular o'zgarmas son C ga farq qilar ekan. 1-misolda $\dfrac{x^3}{3}+C$, 2-misolda $(-\cos x+C)$, 3-misolda esa $(\arcsin x+C)$ boshlang'ich funksiyalar bo'ladi.

Ta'rif. $f(x)$ funksiyasining boshlang'ich funksiyasining umumiy ko'rinishi $F(x)+C$ ga shu $f(x)$ funksiyasining aniqmas integrali deyiladi va u quyidagicha yoziladi:

$$\int f(x)dx=F(x)+C.$$

Bunda $\int$ — integral belgisi, $f(x)dx$ — integral ostidagi ifoda deb yuritiladi.

Ta'rif. $f(x)$ funksiyasining boshlang'ich funksiyasining umumiy ko'rinishi $F(x)+C$ ni topish amaliga integrallash amali deyiladi. Bu ta'rifdan ko'rinadiki, $f(x)$ — funksiyaning integrallash amali shu funksiyaning hosila olish yoki differensiallash amaliga nisbatan teskari bo'lgan amal ekan. Integrallash amali quyidagi muhim xossalarga ega:

1- xossa. Agar differensiallash belgisi integrallash belgisidan oldin kelsa, ular o'zaro teskari amallar bo'lgani uchun bir-birini yo'qotadi:

$$d\int f(x)dx=f(x)dx.$$

2- xossa. Differensial belgisi integral belgisidan keyinda kelsa, bu belgilar bir-birini yo'qotgandan so'ng $F(x)$ ga o'zgarmas C soni qo'shiladi:

$$\int df(x)dx=F(x)+C.$$

I s b o t i . $\int dF(x)=\int F'(x)dx=\int f(x)dx=F(x)+C.$

3- xossa. O'zgarmas sonni integral ishorasi tashqarisiga chiqarib yozish mumkin:

$$\int k\cdot f(x)dx=k\cdot\int f(x)dx.$$

4- xossa. Algebrik yig'indi (ayirma)ning integrali qo'shiluvchi (ayriluvchi)lar integrallarining algebrik yig'indisiga (ayirmasiga) teng:

$$\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx.$$

Isboti. $d\int[f(x)\pm g(x)]dx = d\{\int f(x)dx \pm \int g(x)dx\} =$

$$= d\int f(x)dx \pm d\int g(x)dx = f(x)dx \pm g(x)dx.$$

INTEGRAL JADVALI

1. $\int dx = x + C.$

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

5. $\int e^x dx = e^x + C.$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

7. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C.$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arcs\sin \frac{x}{a} + C.$

11. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C.$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln | x + \sqrt{x^2 + a^2} | + C.$

13. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln | \frac{x-a}{x+a} | + C.$

ANIQMAS INTEGRALDA O'ZGARUVCHINI ALMASHTIRISH

Faraz qilaylik, $I = \int f(x)dx$ integralni hisoblash kerak bo'lsin. Integral ostida shunday $f(x)$ funksiyalar mavjud bo'ladiki, bu funksiyalarning integralini hisoblash uchun yangi o'zgaruvchi kiritishga to'g'ri keladi. Faraz qilaylik, $I = \int f(x)dx$ integralda $x = \varphi(t)$ o'zgaruvchini almashtiraylik, u holda $dx = \varphi'(x)dt$ bo'ladi. Ularni integral ostidagi ifodaga qo'ysak, $\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$ bo'ladi. Bu formula aniqmas integralda o'zgaruvchi almashtirish formulasi deyiladi.

1-misol. $I = \int \frac{dx}{5-3x}$ ni hisoblang.

$$5 - 3x = z; \quad x = \frac{5-z}{3} \quad dx = -\frac{1}{3}dz.$$

$$I=\int \frac{dx}{5-3x}=-\frac{1}{3}\int \frac{dz}{z}=-\frac{1}{3}\ln|z|=-\frac{1}{3}\ln|5-3x|+C.$$

2-misol. $I=\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$ ni hisoblang. Buni hisoblash uchun o'zgaruvchi almashtirish usulidan foydalaniladi.

$x+1=z^3$ desak, $x=z^3-1$, $dx=3z^2dz$,

$$I=\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}=\int \frac{3z^2dz}{1+z}=3\int \frac{z^2-1+1}{1+z}dz=$$

$$=3\left(\int \frac{z^2-1}{1+z}dz+\int \frac{dz}{1+z}\right)=3\left(\int \frac{(z-1)(z+1)}{z+1}dz+\int \frac{dz}{1+z}\right)=$$

$$=3\left(\frac{z^2}{2}-z+\ln|1+z|+C\right)=-\frac{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}{2}-$$

$$-3\sqrt[3]{x+1}+3\ln|1+\sqrt[3]{x+1}|+C.$$

ANIQMAS INTEGRALNI BO'LAKLAB INTEGRALLASH

Bizga differensiallanuvchi bo'lgan $U(x)$ va $V(x)$ funksiyalari berilgan bo'lsin.

Ma'lumki, $d(U\cdot V)=VdU+UdV$ edi.

Bu yerdan UdV topilsa, $UdV=d(U\cdot V)-VdU$ bo'ladi. Bu tengliklar integrallansa, $\int UdV=\int d(UV)-\int VdU$, $\int UdV=UV-\int VdU$.

Bu formula aniqmas integralda bo'laklab integrallash formulasi deyiladi.

1-misol. $I=\int x\ln x dx$ ni hisoblang.

$U=\ln x$ bo'lsa, $dU=\frac{1}{x}dx$ bo'ladi. $dV=xdx$ bo'lsa, $V=\frac{x^2}{2}$ bo'ladi.

$$I=\int x\ln x dx=\frac{\ln x}{2}\cdot x^2-\int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{\ln x}{2}x^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}=$$

$$=\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)+C.$$

Masala. Dekart koordinatalar sistemasida chap tomondan $x=a$ o‘ng tomonda $x = b$, ostki tomondan $y=0$ va yuqori tomondan $y=f(x)$ egri chizig‘i bilan chegaralangan *aABb* ko‘rinishdagi egri trapetsiyaning yuzasi hisoblansin.

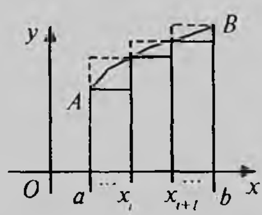
Ushbu masalani yechish aniq integral tushunchasiga olib keladi. Bu masalani yechish uchun *ab* kesmani ixtiyoriy *n* ta bo‘lakka bo‘lib bo‘linish nuqtalaridan *Oy* o‘qiga parallel to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazilsa, izlanayotgan egri trapetsiya (n-1) trapetsiyalarga ajraladi. Bu trapetsiyalarning yuzalarini hisoblashda Darbuning quyi va yuqori yig‘indilari degan tushunchalar hamda bu yig‘indilar orasida yotuvchi Riman yig‘indisi degan tushunchalardan foydalanib ular orasidagi matematik qonuniyatlarni o‘rnatish natijasida aniq integral tushunchasiga quyidagicha ta’rif beriladi. Ta’rif berish jarayonida $\lambda = (\max \Delta x_i)$.

Ta’rif: $\lambda \to 0$ σ yig‘indi chekli limitga ega bo‘lsa, bu limit $[a,b]$ ni maydalash usuliga va undagi nuqtalarni tanlanishiga bog‘liq bo‘lmasa u holda bu limit $y=f(x)$ funksiyasini $[a,b]$ dagi aniq integrali deyiladi va u quyidagicha yoziladi:

$$\lim \sigma = \lim_{\Delta\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx. \qquad (1)$$

(1) egri trapetsiya yuzini hisoblash formulasidir. (1) Nyuton – Leybnes formulasi bo‘yicha hisoblanadi:

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

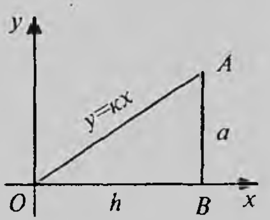


29-chizma.

Aniq integral mavzusi muammoli ta’limning muammoli vaziyatlari asosida tushuntirildi. Bu mavzuning ilmiy metodik isbotini talabalar qo‘yilgan muammoli vaziyatlarni ilmiy-metodik yechimlarini o‘zlari topishga harakat qiladilar degan umiddamiz.

Masala. Balandligi *h* ga asosi *a* ga teng bol‘gan uchburchakning yuzasini hisoblang.

Berilgan uchburchak *OAB OB=h, AB=a, OA=y=kx.*



30-chizma.

Yechish:

$$S = \int_0^h f(x)dx = \int_0^h \frac{a}{h} xdx = \frac{a}{h}\frac{x^2}{2}\Big|_0^h = \frac{a \cdot h^2}{h \cdot 2} = \frac{1}{2} a \cdot h.$$

QUYIDAGI INTEGRALLARNI HISOBLANG

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$. *Javobi:* $\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C.$

2. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$. *Javobi:* $\sqrt{x^2+1}+C.$

3. $\int \frac{dx}{3x-2}$. *Javobi:* $\frac{1}{3}\ln|3x-2|+C.$

4. $\int \ln^2 xdx$. *Javobi:* $x\left(\ln^2 x-2\ln x+2\right)+C.$

5. $\int e^x \cos xdx$. *Javobi:* $\frac{e^x}{2}(\sin x+\cos x)+C.$

6-§. Differensial tenglamalar

Ixtiyoriy nuqtasiga o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsiyenti absissasining ikkilanganiga teng bo'lgan xossaga ega egri chiziq tenglamasini topaylik.

Y e c h i s h. Masala shartidan egri chiziqning $M(x,y)$ nuqtasiga o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsiyenti $2x$ ga tengligi kelib chiqadi. Ikkinchi tomondan urinmaning burchak koeffitsiyenti M nuqtaning ordinatasi y dan absissasi x bo'yicha olingan hosiladan iboratdir. Shunday qilib, ushbu tenglikka ega bo'lamiz:

$$\frac{dy}{dx}=2x \tag{1}$$

yoki

$$dy=2xdx \tag{2}$$

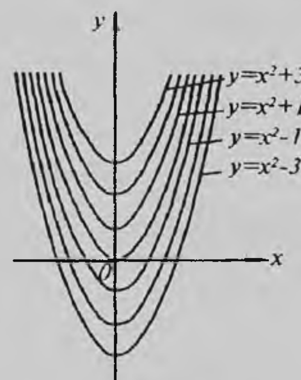
(1) yoki (2) tenglik asosida egri chiziq tenglamasini topishga, ya'ni o'zgaruvchi y ni x ning funksiyasi sifatida ifodalashga urinib ko'raylik. (1) tenglik hosilani o'z ichiga oladi; (2) tenglik esa izlanayotgan funksiyaning differensialini o'z ichiga oladi; shuning uchun bunday tengliklar differensial tenglamalar deyiladi. Ildizlari sonlardan iborat bo'lgan algebraik tenglamalardan farqli o'laroq differensial tenglamalarning yechimi deb differensial tenglamani qanoatlantiruvchi x o'zgaruvchining funksiyasiga aytiladi, ya'ni u shunday funksiyaki, tenglamadagi y ning o'rniga qo'yilganda, uni ayniyatga aylantiradi. y ni xuddi shu funksiya deb faraz qilib (2) tenglikni ayniyat sifatida qarashi mumkin; uni integrallab topiladi:

$$\int dy = \int 2xdx + C \quad \text{yoki} \quad y = x^2 + C,$$

bunda C — ixtiyoriy o‘zgarmas.

O‘zgarmas C ning istalgan qiymatida $x^2 + C$ ifodaning differensiali $2xdx$ ga teng. (2) tenglamada y ni $x^2 + C$ ifoda bilan almashtirish, $d\left(x^2 + C\right) \equiv 2xdx$ ayniyatga olib keladi. Shunday qilib, (2) tenglamaning yechimi bo‘lib bir emas, balki o‘zgarmas C ning qiymati bilan bir-biridan farq qiluvchi va $x^2 + C$ ifoda bilan aniqlanuvchi cheksiz ko‘p funksiyalar to‘plami xizmat qiladi. Bu holda (2) tenglamaning yechimi bitta parametr C ga bog‘liq bo‘lgan funksiyalar oilasidan iborat deyiladi.

Geometrik nuqtayi nazardan bu masala shartini aniq bir egri chiziq emas, balki C ning turli qiymatlariga mos kelgan egri chiziqlar oilasi (parabolalar) qanoatlantiradi degan ma’noni bildiradi. Bu oilaga tegishli egri chiziqlar (2) tenglamaning (yoki (1) ning, farqsiz) integral egri chiziqlari deyiladi.



31-chizma.

2. Endi quyidagi ikki xossaga ega bo‘lgan egri chiziq tenglamasi topiladi: 1) egri chiziqning ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtasidagi urinmaning burchak koeffitsiyenti $-\frac{x}{y}$ ga teng; 2) egri chiziq $M_0(3,4)$ nuqtadan o‘tadi.

Y e c h i s h. (1) shart ushbu differensial tenglamaga olib keladi:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

yoki

$$ydy = -xdx. \tag{3}$$

y funksiya deganda (3) tenglamani qanoatlantiruvchi funksiya tushuniladi, ya’ni (3) tenglikni ayniyat sifatida deb qaraladi va topiladi:

$$\int ydy = -\int xdx + C,$$

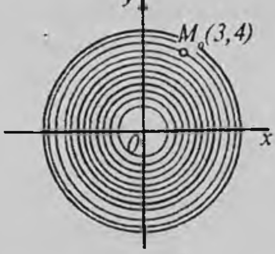
bundan esa:

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \tag{4}$$

yoki

$$x^2 + y^2 = C. \qquad (5)$$

(5) tenglikda $2C$ o'rniga C ning o'zi yozildi, chunki C ixtiyoriy o'zgarmas bo'lgani uchun uni $2C$ ko'rinishida yoki C ko'rinishida yozish farqsizdir.



32-chizma.

Masalan, (4) tenglikda C ga biror son qiymati, masalan, 5 berilsa (va, demak, $2C=10$), u holda (5) tenglikdagi o'zgarmas C ga 10 qiymati berish mumkin.

Olingan (5) tenglik (3) tenglamaning integral egri chiziqlari koordinata boshida umumiy markazga ega bo'lgan (o'zgarmas) konsentrik aylanalar oilasi ekanini ko'rsatadi. Endi bu egri chiziqlardan nuqtadan o'tuvchi egri chiziq tenglamasini topishi kerak. Bunday aylana aniq radiusga ega bo'ladi, uni (5) tenglikdan $x=3$ va $y=4$ deb aniqlanadi.

Shunday qilib, $3^2 + 4^2 = C$, ya'ni $C = 25$ va izlangan egri chiziq ushbu tenglama bilan aniqlanadi:

$$x^2 + y^2 = 25.$$

3. Endi differensial tenglamalar nazariyasi bilan bog'liq bo'lgan asosiy tushunchalar va ta'riflarni ko'rishga o'tiladi.

x erkli o'zgaruvchi; y esa x ning noma'lum funksiyasi bo'lsin; x,y ni va uning turli tartibli hosilasi yoki differensialini o'zaro bog'lovchi tenglik differensial tenglama deyiladi. Masalan, ushbu tenglik differensial tenglamadir:

$$y' + xy = 0. \qquad (6)$$

Differensial tenglamani qanoatlantiruvchi har qanday funksiya uning yechimi deyiladi.

Masalan, $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$ funksiya (6) tenglamaning yechimidir. Haqiqatan ham, $y' = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$ va tenglamaning chap tomonidagi y ni $e^{-\frac{x^2}{2}}$ bilan va y' ni $-xe^{-\frac{x^2}{2}}$ ifoda bilan almashtirib, ushbu ayniyatga ega bo'lamiz:

$$-xe^{-\frac{x^2}{2}} + xe^{-\frac{x^2}{2}} = 0.$$

Differensial tenglamaning tartibi deb tenglamada ishtirok etuvchi hosila (differensial) ning eng yuqori tartibiga aytiladi. Misol uchun (6) tenglama birinchi tartibli tenglamadir;

$$y''-y=0 \tag{7}$$

tenglama esa ikkinchi tartibli tenglamadir.

Biz (2) tenglamaning yechimi

$$y=x^2+C \tag{8}$$

funksiyalar oilasi, (3) tenglamaning yechimi esa

$$x^2+y^2=C \tag{9}$$

funksiyalar oilasi ekanini ko'rdik. (8) tenglamadagi kabi (9) tenglamada ham ixtiyoriy o'zgarmas qatnashadi.

Umuman differensial tenglamaning umumiy yechimi yoki integrali deb uning tenglama tartibi qancha bo'lsa, shuncha ixtiyoriy o'zgarmas ishtirok etgan yechimiga aytiladi yoki, boshqacha aytganda, tenglama tartibiga teng bo'lgan $C_1, C_2, C_3, \ldots C_n$ parametrlarga bog'liq bo'lgan funksiyalar oilasi tenglamasiga aytiladi. Agar bunda tenglama y ga nisbatan yechilgan bo'lsa, u holda uni differensial tenglamaning umumiy yechimi, agar y ga nisbatan yechilmagan bo'lsa, umumiy integrali deyiladi.

Shunday qilib, (8) munosabat (2) differensial tenglamaning umumiy yechimidir, (9) munosabat esa (3) differensial tenglamaning umumiy yechimidir.

Ikkinchi tartibli differensial tenglama (7) ning umumiy yechimi quyidagi ko'rinishga ega ekaniga ishonch hosil qilish qiyin emas:

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x. \tag{10}$$

Ixtiyoriy o'zgarmasning aniq son qiymatlari uchun umumiy yechimdan olinadigan yechim xususiy yechim deyiladi.

Differensial tenglamaning xususiy integrali ham xuddi shunday aniqlanadi.

(2) tenglamaning yechimi (3) tenglamaning xususiy integrali $x^2+y^2=25$ ni topishga keltiriladi.

Umumiy yechim (yoki integral)ning grafiklari berilgan differensial tenglamaning integral egri chiziqlari deyiladi.

Qoidaga ko'ra tekislikning nuqtasidan birinchi tartibli differensial tenglamaning faqat bitta integral chizig'i o'tadi. Shuning uchun birinchi tartibli differensial tenglamaning kerakli xususiy yechimi (yoki integrali)ni topish uchun x argumentning x_0 qiymatiga va unga mos y ning y_0 qiymatiga ega bo'lish zarur.

Bu qiymatlar differensial tenglamaning boshlang'ich shartlari deyiladi. Boshlang'ich shart quyidagicha yoziladi:

$$y(x_0)=y_0.$$

Demak, (2) masalaning boshlang'ich sharti quyidagi tenglik bilan yoziladi

$$y(3) = 4.$$

Biz ko'rdikki, shu masalani yechish jarayonida boshlang'ich shart yordamida differensial tenglamaning umumiy yechimida (umumiy integralida) qatnashuvchi o'zgarmas C ning qiymati aniqlanadi.

Takrorlash uchun savollar

1. To'g'ri proporsional bog'lanish nima?
2. Teskari proporsional bog'lanish nima?
3. Funksiya ta'rifini ayting.
4. Funksiyaning aniqlanish va o'zgarish sohasi deb nimaga aytiladi?
5. Funksiyaning berilish usullari deganda nimani tushunasiz?
6. Hosila qanday ta'riflanadi?
7. Hosilaning geometrik ma'nosini ayting.
8. Elementar funksiyalarda hosila qanday bajariladi?
9. Murakkab funksiyaning hosilasi qanday formula bilan ifodalaniladi?
10. Yuqori tartibli hosila deganda nimani tushunasiz?
11. Berilgan funksiyaning boshlang'ich funksiyasi deb nimaga aytiladi?
12. Berilgan funksiyaning boshlang'ich funksiyasining umumiy ko'rinishi deganda nimani tushunasiz?
13. Berilgan funksiyani integrali deb nimaga aytiladi?
14. Aniqmas integralning asosiy xossalarini ayting.
15. Aniqmas integralda o'zgaruvchining almashtirish formulasi qanday ifodalanadi?
16. Aniqmas integralda bo'laklab integrallash formulasini yozing.
17. Qanday tenglamaga differensial tenglama deb aytiladi?
18. Differensial tenglama qanday yechiladi?
19. Differensial tenglamaning xususiy yechimi qanday topiladi?
20. Differensial tenglamaning boshlang'ich shartlarni qanday topiladi?

Tayanch iboralar

To'g'ri proporsional, teskari proporsional, funksiya, funksiyaning aniqlanish va o'zgarish sohasi, funksiyaning berilish usullari, hosila, hosilaning geometrik ma'nosi, murakkab funksiyaning hosilasi, yuqori tartibli hosila, boshlang'ich funksiya, funksiyaning integrali, aniqmas integralning asosiy xossalari, aniqmas integralda o'zgaruvchini almashtirish, aniqmas integralda bo'laklab integrallash, differensial tenglama, differensial tenglamaning yechimlari, differensial tenglamaning xususiy yechimlari.

X bob.
GEOMETRIYA KURSINING AKSIOMATIK QURILISHI AKSIOMA, POSTULAT, TEOREMA VA UNING TURLARINI O'RGATISH METODIKASI

1-§. Matematik hukmning turlari

Ma'lumki, maktab geometriya kursi deduktiv asosida mantiqiy qurilgan fan bo'lib, u asosan planimetriya va stereometriya bo'limlaridan iboratdir. Geometriyaning planimetriya bo'limida tekislikdagi geometrik figuralarning qonuniyatlari, stereometriya bo'limida esa fazoviy geometrik figuralarning qonuniyatlari o'rganiladi. Uning deduktiv qurilgani shu bilan izohlanadiki, geometriya kursini umumiylikdan xususiylikka tomon o'rganiladi. Chunki, avvalo, tekislikda yotuvchi ixtiyoriy nuqtalar to'plamiga geometrik figura deb ta'rif beriladi, so'ngra ana shu geometrik figuraning xususiy hollari o'rganiladi. Masalan, ko'pburchak va uning qabariq, botiq turlari o'rganiladi, so'ngra qabariq ko'pburchakning turlari bo'lmish to'rtburchak, parallelogramm, trapetsiya, romb va kvadratlarning xossalari o'rganiladi. Demak, bu yerda o'rganish jarayoni umumiylikdan xususiylik tomon amalga oshiriladi. Geometriya kursining mantiqiyligi deganda:

a) ta'riflanmaydigan boshlang'ich tushunchalar qabul qilinadi (nuqta, to'g'ri chiziq, tekislik va masofa);

b) boshqa geometrik figuralar ta'riflanmaydigan tushunchalar yordamida ta'riflanadi;

d) aksiomalar sistemasi qabul qilinadi;

e) ta'rif va aksiomalar yordamida teoremalar isbotlanadi.

Yuqoridagi aytib o'tilgan bosqichlar geometriya kursining mantiqiy qurilganligini ko'rsatadi.

Maktab matematika kursida matematik hukmlar aksioma, postulat va teorema ko'rinishda beriladi.

Aksioma grekcha *axioma* so'zidan olingan bo'lib, uning lug'aviy ma'nosi «obro'ga ega bo'lgan gap» demakdir. Shuning uchun ham aksiomaga maktab matematika kursida quyidagicha ta'rif berilgan:

«Isbotsiz qabul qilinadigan matematik hukm aksioma deyiladi».

Aksioma asosan eng sodda geometrik figura yoki sodda matematik qonuniyatlarning asosiy xossalarini ifodalovchi hukmdir. Masalan, maktab geometriya kursida o'rganish uchun qabul qilingan aksiomalarni qaraylik:

1. «Tekislikda yotuvchi ixtiyoriy bitta nuqtadan shu tekislikdagi to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan faqat bitta to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin».

2. «Tekislikdagi har qanday ikki nuqtadan faqat bitta to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin».

Ma'lumki, matematika fani aksiomalar sistemasi asosida qurilgandir. Matematika fanining mantiqiy asosda qurilishini yaratish uchun aksiomalarning bo'lishligi haqida fikr Gretsiyada bundan ming yil avval paydo bo'lgan edi. XIX asrning oxiri va XX asrning boshlarida matematika fanining turli bo'limlarida aksiomalar chuqur o'rganildi va rivojlantirildi.

Matematika kursidagi aksiomalar sistemasi asosan quyidagi uch talabga javob berishi kerak.

1. Aksioma sistemasi ziddiyatsiz bo'lishi kerak. Bu degan so'z, biror aksiomadan chiqarilgan natija shu aksioma yordamida hosil qilingan boshqa natijaga yoki boshqa aksiomadan chiqarilgan xulosaga zid kelmasligi kerak.

2. Aksiomalar sistemasi mustaqil bo'lishi kerak, ya'ni hech bir aksioma ikkinchi bir aksiomadan kelib chiqadigan bo'lmasligi kerak.

3. Aksiomalar sistemasi shu fanga oid istalgan bir yangi tushunchani isbot etish uchun yetarli bo'lishi kerak, ya'ni biror matematik jumlani isbotlashda hech qachon o'z-o'zidan tushunilishiga yoki tajribaga tayanilmaydi, bu matematik jumla boshqa teoremalar oxirida aksiomalar bilan asoslanishi kerak bo'ladi.

Maktab geometriya kursida quyidagi aksiomalar sistemasi mavjud.

1. Tegishlilik aksiomasi:

a) har qanday to'g'ri chiziq nuqtalar to'plamidan iboratdir.

b) har qanday ikki nuqtadan bitta va faqat bitta to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin.

d) har qanday to'g'ri chiziqni olmaylik, shu to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lgan va tegishli bo'lmagan nuqtalar mavjud.

2. Masofa aksiomasi:

a) har bir kesmaning uzunligi shu kesmaning har qanday nuqtasi ajratgan masofalar uzunliklarining yig'indisiga teng:

b) A nuqtadan B nuqtagacha bo'lgan masofa B nuqtadan A nuqtagacha bo'lgan masofaga teng: $|AB| = |BA|$.

d) Ixtiyoriy uchta A, B, C nuqta uchun A dan C gacha bo'lgan masofa A dan B gacha va B dan C gacha bo'lgan masofalar yig'indisidan katta emas: $|AC| \leq |AB| + |BC|$.

3. Tartib aksiomasi:

a) to‘g‘ri chiziqdagi uchta nuqtadan bittasi va faqat bittasi qolgan ikkitasi orasida yotadi.

b) to‘g‘ri chiziq tekislikni ikki yarim tekislikka ajratadi.

4. Harakat aksiomasi:

a) Agar $|AB|$ masofa musbat bo‘lib, u $|A_1B_1|$ masofaga teng bo‘lsa, A nuqtani A_1 nuqta va B nuqtani B_1 nuqtaga akslantiruvchi faqat ikkita siljitish mumkin.

5. Paralellik aksiomasi:

Berilgan nuqtadan to‘g‘ri chiziqqa bitta va faqat bitta parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin.

2-§. Postulat

«Postulat» so‘zi lotincha so‘z bo‘lib, uning lug‘aviy ma’nosi «talabni belgilovchi» demakdir. Postulat — bu ma’lum bir talab yoki shartlarni ifodalovchi matematik hukm bo‘lib, bundagi talab va shartlarni ba’zi bir tushuncha yoki tushunchalar orasidagi munosabatlar orqali qanoatlantiradi.

1-misol. Evklidning «Negizlar» kitobida paralellik aksiomasi «beshinchi postulat» deb atalgan qadimgi matematiklar ana shu paralellik aksiomasini XIX asrning boshlarigacha isbotlashga urinib keldilar. Bu urinishlar har doim muvaffaqiyatsizlik bilan tugadi. Paralellik aksiomasining to‘g‘riligi hech kimda shubha tug‘dirmasada, uni mavjud aksiomalarning va ilgari isbot qilingan geometrik faktlarning asosi uchun qabul qilish mumkin emasmikan, ya’ni u o‘zicha teoremadan iborat emasmikan, degan savol barcha matematiklarni qiziqtirar edi. Parallel to‘g‘ri chiziqlar aksiomasini teskarisidan faraz qilish usuli bilan, ya’ni nuqta orqali berilgan to‘g‘ri chiziqqa parallel bir nechta to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin, deb qabul qilib isbotlashga urinishlar matematik qonuniyatlarga zid bo‘lgan holatlarni keltirib chiqarishi kerak edi, ammo bunday bo‘lmadi. Buyuk rus matematigi N.I.Lobachevskiy va undan bexabar holda venger matematigi Ya.Boya nuqta orqali berilgan to‘g‘ri chiziqqa parallel bir necha to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin, degan farazni qabul qilib, boshqa «noyevklid geometriya«ni qurish mumkinligini isbot qildilar. Lobachevskiy geometriyasi ana shunday dunyoga keldi.

2-misol. Munosabatlar ekvivalentligining ta’rifi ham quyidagi uchta postulat orqali ifodalanadi:

1) munosabat refleksiv bo‘lishi kerak: $\forall a \in A : a \xrightarrow{f} a$;

2) munosabat simmetrik bo‘lishi kerak:

$$\forall a, b \in A : \left(a \xrightarrow{f} b\right) \Rightarrow \left(a \xrightarrow{f} b\right);$$

3) munosabat tranzitiv bo'lishi kerak:

$$\forall a,b \in A : [\ \left(a \xrightarrow{f} b\right) \wedge \left(b \xrightarrow{f} c\right) \Rightarrow \left(a \xrightarrow{f} c\right).$$

3-§. Teorema va uning turlari

Teorema so'zi grekcha so'z bo'lib, uning lug'aviy ma'nosi «qarab chiqaman» yoki «o'ylab ko'raman» demakdir, shuning uchun ham maktab matematika kursida teoremaga quyidagicha ta'rif berilgan: *«Isbotlashni talab etadigan matematik hukm teorema deyiladi»*.

Maktab matematika kursida teoremalarning quyidagi turlari mavjuddir:

1. To'g'ri teorema.
2. Teskari teorema.
3. To'g'ri teoremaga qarama-qarshi teorema.
4. Teskari teoremaga qarama-qarshi teorema.

To'g'ri va unga nisbatan teskari bo'lgan teorema tushunchalarini o'quvchilarning ongida shakllantirishni — VI sinf geometriya kursining birinchi darslaridan boshlab amalga oshirish kerak. Masalan, quyidagi ikkita tushunchani olib qaraylik.

1. Bu figura parallelogrammdir.
2. Bu figura to'rtburchakdir.

Berilgan bu ikkala hukm o'zaro bog'liqdir. Boshqacha aytganda, birinchisining haqiqatligidan ikkinchining haqiqatligi kelib chiqadi, ammo ikkinchisining mavjudligidan birinchisining haqiqatligi har doim ham kelib chiqavermaydi. Agar bu bog'lanishni simvolik ravishda yozadigan bo'lsak u quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{\text{paralellogramm}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{to'rtburchak}}$$

Bu yerda biz paralellogramlar sinfini to'rtburchaklar sinfiga kiritdik. Yuqoridagidek bog'lanishlar geometriya kursining birinchi darslaridan boshlab tekshirayotgan matematik hukmlarning ichki o'zaro bog'lanishini ochib beradi. Masalan, «Ichki almashinuvchi burchaklar o'zaro teng» degan hukmni simvolik holda quyidagicha yozish mumkin:

$$\boxed{\text{Ichki almashinuvchi burchaklar}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{Teng burchaklar}}$$

Bu yerga agar ichki almashinuvchi burchaklar mavjud bo'lsa, u holda ular teng bo'ladi, degan fikr tasdiqlanadi. Agar yo'nalish teskari tomonga qo'yilsa, bunday mulohaza hosil bo'ladi: «Agar burchaklar teng bo'lsa, u holda ular ichki almashinuvchi burchaklardir». Agar teoremadagi shart va xulosaning o'zaro bog'liqligini «agar», «u holda» so'zlari bilan bog'lansa, bunda o'quvchilar teoremaning sharti, natijasi va ular orasidagi bog'lanish haqida chuqurroq tasavvurga ega bo'ladi. Masalan, agar bir uchburchakning ikki tomoni ikkinchi uchburchakning ikki tomoniga mos ravishda teng bo'lsa, bunday uchburchaklar teng bo'ladi. Bu aytilgan teoremaning shartidan uning xulosasi kelib chiqmaydi, ammo uning xulosasidan sharti har doim kelib chiqadi. Shuning uchun uni simvolik ravishda bunday yozish mumkin:

Bir uchburchakning ikki tomoni ikkinchi uchburchakning ikki tomoniga mos ravishda teng bo'lsa	$\Leftarrow$	uchburchaklar teng

Maktab geometriya kursida shunday teoremalar borki, ularning shartidan xulosasining to'g'riligi va aksincha, xulosasidan shartining to'g'riligi kelib chiqadi. Masalan:

1. Agar to'g'ri chiziq burchak bissektrisasi bo'lsa, u berilgan burchakni teng ikkiga bo'ladi.

Bunga teskari bo'lgan teorema ham o'rinlidir: «Agar to'g'ri chiziq burchakni teng ikkiga bo'lsa, bu to'g'ri chiziq shu burchakning bissektrisasidir». Bu aytilganlarni simvolik ravishda bunday yozish mumkin:

Agar to'g'ri chiziq burchak bissektrisasi bo'lsa	$\Leftarrow$ $\Rightarrow$	Burchak teng ikkiga bo'linadi

Bundan ko'rinadiki, teorema shartining mavjudligidan uning xulosasining haqiqiyligi kelib chiqsa va aksincha, uning xulosasining mavjudligidan haqiqatligi kelib chiqsa, teoremaning shart va xulosalarida qatnashayotgan «agar» va «u holda» bog'lovchilarining o'rinlari o'zgaradi.

Agar biz shartli ravishda berilgan teoremani to'g'ri teorema desak, bu teoremadagi shart va xulosalarning o'rinlarini almashtirish natijasida hosil qilingan teoremani teskari teorema deb ataladi.

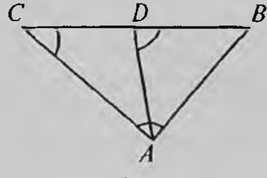
Endi to'g'ri va teskari teoremalarning berilishi hamda ularni isbotlash uslubiyatini ko'rib chiqaylik.

1. To'g'ri teorema: «Agar uchburchakning biror tomoni katta bo'lsa, u holda ana shu katta tomon qarshisida katta burchak yotadi».

Berilgan: ΔABC, $BC > AB$.

Isbot qilish kerak: $A > C$.

Isboti. ABC uchburchakning BC tomonida AB tomonga teng $BD=AB$ kesmani o'lchab, ana shu D nuqtani A nuqta bilan birlashtiriladi (33-chizma), natijada ABD teng yonli uchburchak hosil bo'ladi. ABD uchburchak teng yonli bo'lgani uchun $\angle BAD=\angle BDA$. BDA burchak ADC burchakning tashqi burchagi bo'lgani uchun $\angle BAD=\angle C+\angle DAC$ bo'ladi, bundan $\angle BAD>\angle C$ ekani kelib chiqadi. Bu yerdagi BAD burchak A burchakning bir qismi xolos. Shuning uchun $\angle A >\angle C$.



33-chizma.

Teskari teorema: «Agar uchburchakning biror burchagi katta bo'lsa, u holda ana shu katta burchak qarshisida katta tomon yotadi».

Berilgan: ΔABC, $\angle A > \angle C$.

Isbot qilish kerak: $BC>AB$.

Isboti. 1) ABC uchburchakning AB tomoni hech qachon BC tomonidan katta bo'la olmaydi, chunki to'g'ri teoremada biz katta tomon qarshisida katta burchak yotadi, deb isbot qildik, aks holda $\angle C>\angle A$ ligi kelib chiqadi, bu esa teorema shartiga ziddir.

2) AB tomon BC tomonga teng ham bo'la olmaydi, chunki $\angle ABC$ teng yonli emas, agar teng yonli bo'lganda edi $\angle C>\angle A$ tenglik o'rinli bo'lib, bu ham teorema shartiga zid bo'lar edi.

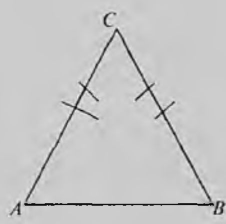
3) Agar AB tomon BC tomondan katta bo'lmasa yoki unga teng bo'lmasa, u holda $BC > AB$ ligi kelib chiqadi.

2. To'g'ri teorema: *Agar uchburchakning tomonlari teng bo'lsa, u holda bu tomonlar qarshisida teng burchaklar yotadi.*

Berilgan: ΔABC, $AC = CB$.

Isbot qilish kerak: $\angle A =\angle B$.

Isboti. ABC asosi AB bo'lgan teng yonli uchburchak bo'lsin. $\angle A=\angle B$ ekanligi isbotlanadi. Uchburchaklar tengligining birinchi alomatiga ko'ra CAB burchak CAB burchakka teng bo'ladi, chunki $CA=CB$ va $\angle C=\angle C$. Bu uchburchaklarning tengligidan: $\angle A=\angle B$.



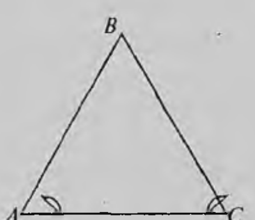
34-chizma.

Teskari teorema. *Agar uchburchakning burchaklari o'zaro teng bo'lsa, u holda bu burchaklar qarshisida teng tomonlar yotadi* (35-chizma).

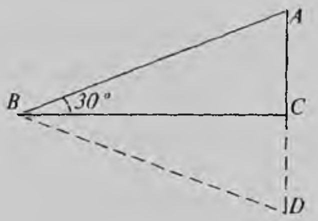
Berilgan: $\angle ABC$, $\angle A = \angle C$.

Isbot qilish kerak: $BC = AB$.

Isboti. 1) BC tomon AB tomondan katta bo'la olmaydi, aks holda avvalgi isbot qilingan teoremaga ko'ra $\angle A>\angle C$ bo'lar edi, bu esa teorema shartiga ziddir.



35-chizma.



36-chizma.

2) BC tomon AB tomondan kichik ham bo'la olmaydi, aks holda avvalgi isbot qilingan teoremaga ko'ra $\angle C > \angle A$ bo'lar edi, bu esa teorema shartiga ziddir. Demak, $BC = AB$.

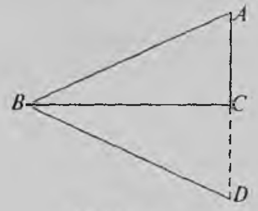
4. To'g'ri teorema. *Agar uchburchak to'g'ri burchakli bo'lib, uning bir burchagi 30° bo'lsa, u holda 30° li burchak qarshisidagi katet gipotenuzaning yarmiga teng bo'ladi* (36-chizma).

Berilgan: ABC burchak to'g'ri burchakli, $\angle B=30°$.

Isbot qilish kerak: $AC = \frac{AB}{2}$.

Isboti. AC katetni davom ettirib, $CD=AC$ kesmani qo'yib, D nuqtani B nuqta bilan birlashtiramiz. U holda $\Delta BCD=\Delta BCA$ tenglik hosil bo'ladi, chunki $\angle D=\angle A$ va $\angle D=60°$ bo'lganligi uchun ABD uchburchakning A va D burchaklari 60° dan, $\angle ABD=60°$ AD teng tomonli uchburchakdir. Chizmadan

$AC=\frac{AD}{2}$; $AD=AB$, shuning uchun $AC=\frac{AB}{2}$.



37-chizma.

Teskari teorema. *Agar to'g'ri burchakli uchburchakning kateti gipotenuzaning yarmiga teng bo'lsa, u holda shu katet qarshisidagi burchak 30° ga teng bo'ladi* (37- chizma).

Berilgan: Δ ABC to'g'ri burchakli,

$AC = \frac{1}{2}AB$.

Isbot qilish kerak: $\angle ABC = 30°$.

Isboti. AC katetni davom ettirib $CD=AC$ qo'yiladi, u holda $AD=2AC$ bo'ladi, bundan $AD=AB$, ekani kelib chiqadi. B va D nuqtalarni birlashtirsak, $\Delta BCD=\Delta BCA$ bo'ladi, chunki bularning ikkita kateti va ular orasidagi burchaklari o'zaro teng.

$\Delta BCD=\Delta BCA$ ekanligidan $AD=AB$ ga, $\angle ABC=\angle DBC$ u holda $AD=AB$ va $DB=AB$ bulardan ΔABD teng tomonli ekanligini kelib chiqadi, u holda $\angle ABD=60°$, $\angle ABC=\angle DBC$, bu burchaklar yig'indisi $\angle ABD$ ni hosil qiladi, shuning uchun $\angle ABC=30°$.

Agar to'g'ri teoremaning shartini p va uning xulosasini q desak, u holda yuqoridagi teorema turlari uchun quyidagi simvolik ifodalar o'rinlidir:

1) $p \Rightarrow q$ (to'g'ri teorema); 2) $q \Rightarrow p$ (teskari teorema);

3) $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$ (to'g'ri teoremaga qarama-qarshi teorema);

4) $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ (teskari teoremaga qarama-qarshi teorema).

Quyidagi teoremani to'g'ri teorema deb olib, unga nisbatan yuqoridagi teoremaning turlarini qo'llasak, bunday teoremalar hosil bo'ladi:

1) *Agar to'rtburchak paralellogramm bo'lsa, uning diagonali kesishish nuqtasida teng ikkiga bo'linadi, ya'ni* $p \Rightarrow q$.

2) *Agar to'rtburchanning diagonallari kesishish nuqtasida teng ikkiga bo'linsa, u holda bu to'rtburchak paralellogrammdir, ya'ni* $q \Rightarrow p$.

3) *Agar to'rtburchak paralellogramm bo'lmasa, uning diagonallari kesishish nuqtasida teng ikkiga bo'linmaydi, ya'ni* $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$.

4) *Agar to'rtburchakning diogonali kesishib, teng ikkiga bo'linmasa, u holda bunday to'rtburchak paralelogramm emas, ya'ni* $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$.

Bu misoldan ko'rinadiki, agar to'g'ri teoremani shart va xulosalarga ajratish mumkin bo'lsa, u holda ana shu to'g'ri teoremaga teskari, qarama-qarshi hamda to'g'ri teoremadan hosil qilingan teskari teoremaga qarama-qarshi teoremalarni hosil qilish mumkin.

4-§. Teoremalarni isbotlash metodlari

Ta'rif. *Isbotlash — deduktiv xulosa chiqarish zanjiri, demakdir.*

Har qanday isbotlash jarayoni quyidagi uch qismni o'z ichiga oladi:

1. Teoremaning bayoni — isbot talab etiladigan holat.
2. Argumentlar — teoremani isbotlash jarayonida ishlatilgan matematik hukmlar.
3. Isbotlash — deduktiv xulosa chiqarish orqali teorema xulosasida topish talab qilingan noma'lumni uning shartlari hamda avvaldan ma'lum bo'lgan argumentlardan foydalanib keltirib chiqarish.

Teoremani isbotlashga kirish va uni isbotlash jarayonida o'qituvchi yordamida o'quvchilar quyidagi mantiqiy ketma-ketlikka ega bo'lgan bosqichlarni bajarishlari kerak:

1) Teoremaning sharti va uning xulosasi nimadan iborat ekanligini to'la tushunib olishlari kerak.

2) Ana shu teoremaning shart va xulosasida qatnashayotgan har bir matematik tushunchaning ma'nosini bilishlari kerak.

3) Teoremaning shart va xulosa qismlarini matematik simvollar orqali ifodalashlari kerak.

4) Teoremaning shartida qatnashayotgan ma'lum parametrlar teorema xulosasidagi noma'lumni aniqlay oladimi yoki yo'qmi ekanligini bilishlari kerak.

5) Teoremani isbotlash jarayonida teoremadagi shartlardan teorema xulosasining to‘g‘riligini ko‘rsatuvchi natijalar keltirib chiqarishi kerak.

6) Teoremani isbotlash jarayonidagi mantiqiy mulohazalarda teoremaning shartidan to‘la foydalanishlari kerak.

7) Teorema isbot qilib bo‘lingach, isbotlashda qo‘llanilgan metodni ko‘zdan kechirish va imkoni bo‘lsa, isbotlashning boshqa usullarini qidirib topish kerak.

Maktab matematika kursidagi teoremalarni isbotlash ikki usulda amalga oshiriladi.

1) Bevosita isbotlash usuli (to‘g‘ri isbotlash usuli);

2) Bilvosita isbotlash usuli (teskarisidan faraz qilish usuli);

Bevosita isbotlash usuli jarayonida teoremaning shartida qatnashayotgan ma’lum va parametrlardan hamda avvaldan ma’lum bo‘lgan aksioma, ta’rif va teoremalardan foydalangan holda mantiqiy mulohaza yuritib, teorema xulosasida talab qilingan noma’lumlar topiladi. Teoremalarni bunday isbotlash analiz va sintez orqali amalga oshiriladi.

Ta’rif. *Noma’lumlardan ma’lumlarga tomonga izlash metodi analiz deyiladi.*

Psixologik olimlar analiz metodini quyidagicha ta’riflaydilar: *analiz — bu butunlardan bo‘laklarga tomon izlash demakdir.*

Ta’rif. *Ma’lumlardan noma’lumlarga tomon izlash metodiga sintez deyiladi.*

Psixologik nuqtayi nazardan sintez metodi bo‘laklardan butunlarga tomon izlash metodi demakdir.

Fikrimiz dalili sifatida quyidagi teoremani analiz va sintez metodlari orqali isbotlaymiz.

Teorema. B nuqtada kesishuvchi CD va EF to‘g‘ri chiziqlar a tekislikda yotadi va $CB = BD$, $EB = BF$. a tekislikda yotmaydigan A nuqta $AE=EF$ va $AC=AD$ tengliklarni qanoatlantiradigan qilib tanlansa, AB to‘g‘ri chiziq a tekislikka perpendikular bo‘ladi (38-chizma).

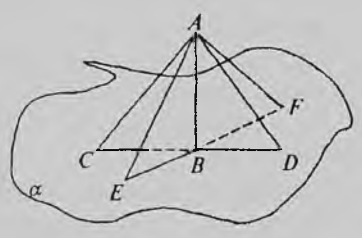
Berilgan: α tekislik, $(CD)\wedge(EF)=B$, $(CB=BD)\wedge(EB=BF)$, $(AE=AF)\wedge(AC=AD)$.

Isbot qilish kerak: $AB\perp a$.

Isboti. Bu teorema analiz metodi bilan isbotlanadi.

1. $AB\perp a$ ekanligini isbot qilish uchun $AB\perp CD$ va $AB\perp EF$ ekanligini isbot qilish yetarli.

2. $AB\perp CD$ ekanligini isbot qilish uchun $\angle ABC=\angle ABD$ ekanligini isbot qilish yetarli.



38-chizma.

3. Bu burchaklarning tengligini isbot qilish uchun $\Delta ABC = \Delta ABD$ ekanligini isbot qilish yetarli, lekin $BC=BD$, $AC=AD$, $AB = AB$ shuning uchun $\Delta ABC=\Delta ABD$.

4. $AB \perp EF$ ekanligini isbot qilish uchun $\angle ABE=\angle ABF$ ekanligini isbot qilish yetarli.

5. Bu burchaklarning tengligini isbot qilish uchun $\Delta ABE=\Delta ABF$ ekanligini isbot qilish yetarli, lekin $BE=BF$, $AE=AF$, $AB=AB$, shuning uchun $\Delta ABE=\Delta ABF$, bundan $AB \perp a$ ekanligi kelib chiqadi.

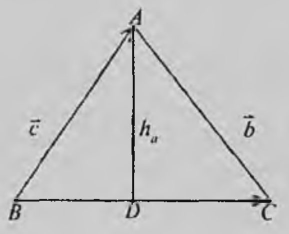
Isbotning sintez usuli

1. $\Delta ABE = \Delta ABF$. 2. $\angle ABE = \angle ABF$.
3. $\Delta ABC = \Delta ABD$. 4. $\angle ABC = \angle ABD$.
5. (2) va (4) ga ko'ra $AB \perp CD$ va $AB \perp EF$.
6. (5) ga ko'ra $AB \perp a$.

Teorema. *Agar a, b, c ABC uchbukchakning tomonlari va p uning yarim perimetri bo'lsa, u holda bu uchburchakning yuzi* $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ *ga teng bo'ladi.*

1. Teoremaning sharti: «agar a, b, c ABC uchburchakning tomonlari va R uning yarim perimetri bo'lsa», teoremaning xulosasi: «u holda bu uchburchakning yuzi $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ga teng bo'ladi».

2. Teoremaning shart va xulosa qismlarida uchburchak, uchburchakning tomonlari, uning perimetri va yarim perimetri hamda uning yuzi kabi tushunchalar qatnashadi (39-chizma).



39-chizma.

3. Berilgan: ΔABC, $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$,

$$\frac{a+b+c}{2} = p.$$

Isbot qilish kerak: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

4. Teorema shartida berilgan uchburchak, uning tomonlari, yarim perimetri kabi tushunchalar uning xulosasida talab qilinayotgan $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ noma'lumni topish uchun yetarlidir.

5. Teoremaning isboti. ΔABC da $\overline{CA} = \vec{b}$, $\overline{AB} = \vec{c}$, $\overline{BC} = \vec{a}$ deb olamiz.

Chizmadan:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a h_a \qquad (1)$$

$$\Delta ADC \Rightarrow \left(\frac{h_a}{b} = \sin \hat{c} \right) \Rightarrow h_a = b \cdot \sin \hat{c} \qquad (2)$$

(2) ni (1) ga qo'yilsa:

$$S = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \hat{c} = \frac{1}{2} \sqrt{(ab)^2 \sin^2 \hat{c}} = \frac{1}{2} \sqrt{(ab)^2 \left(1 - \cos^2 \hat{c} \right)} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{(ab)^2 - \left(ab \cos \hat{c} \right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 - (|\vec{a}||\vec{b}| \cos \hat{c})^2} =$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 - (\vec{a}\,\vec{b})^2}. \qquad (3)$$

$|a||b|\cos \hat{c}$ ifoda $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning skalar ko'paytmasidir.

$\Delta ABC \Rightarrow \vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ bo'ladi, bu ifodaning har ikki tomoni kvadratga ko'tarilsa,

$$\vec{c}^{\,2} = \vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2} - 2\,\vec{a}^{\,2}\,\vec{b}^{\,2},$$

$$\vec{a}^{\,2}\,\vec{b}^{\,2} = \frac{\vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2} - \vec{c}^{\,2}}{2}. \qquad (4)$$

(4) ni (3) ga qo'yilsa:

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \right)^2} = \sqrt{\frac{a^2 b^2}{4} - \frac{1}{4} \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{ab}{2} - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4} \right) \left(\frac{ab}{2} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4} \right)} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{4} \right) \left(\frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{4} \right)} =$$

$$= \sqrt{\left[\frac{c^2-(a-b)^2}{4}\right]\left[\frac{(a+b)^2-c^2}{4}\right]} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a+b+c-2a}{2}\right)\left(\frac{a+b+c-2b}{2}\right)\left(\frac{a+b+c-2c}{2}\right)\left(\frac{a+b+c}{2}\right)} =$$

$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

6. Teoremani isbotlashda vektor, vektorlarni qo'shish, skalar ko'paytma va uchburchakning yuzi kabi tushunchalar asosida mantiqiy mulohaza yuritib, teorema shartida berilgan uchburchakning tomonlari perimetri va yarim perimetri kabi tushunchalardan to'la foydalanib teoremaning isboti keltirib chiqarildi.

7. Qaralgan teoremani yuqoridagidan farqli usul bilan ham isbot qilish mumkin (38-chizma).

Isbot ikkinchi usuli:

Berilgan: ΔABC, $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$, $p=\dfrac{a+b+c}{2}$.

Isbot qilish kerak: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Isboti. $\Delta\ ABC$ ning yuzi uning tomonlari va ular orasidagi burchagiga ko'ra bunday ifodalanadi:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} cb \cdot \sin a,$$

$$\sin a = \frac{2S}{bc}. \qquad (1)$$

Kosinuslar teoremasiga ko'ra: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$, bundan

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \qquad (2); \qquad \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$$

(3)

(1) va (2) larni (3) ga qo'yilsa:

$$\left(\frac{2S}{bc}\right)^2 + \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2 = 1. \qquad \frac{4S^2}{b^2c^2} + \frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)^2}{4b^2c^2} = 1,$$

$$16S^2+\left(b^2+c^2-a^2\right)^2=4b^2c^2,$$

$$S^2=\frac{4b^2c^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)^2}{16}=\frac{\left(2bc+b^2+c^2-a^2\right)\left(2bc-b^2-c^2+a^2\right)}{16}=$$

$$=\frac{\left[(b+c)^2-a^2\right]\left[a^2-(b-c)^2\right]}{16}=\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}\cdot\frac{a+c-b}{2}=$$

$$=p(p-a)(p-b)(p-c),\quad S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Bilvosita isbotlash usuli (teskaridan faraz qilish orqali isbotlash usuli).

Ta'rif. *Teoremaning xulosasidagi no'malumlarni topish unga zid bo'lgan jumlani inkor qilish orqali amalga oshirilgan bo'lsa, uni bilvosita isbotlash usuli deyiladi.*

Yuqoridagi ta'rifdan ko'rinadiki, isbotlashning bilvosita usulida biz oldin teorema tasdiqlagan fikrga qarama-qarshi fikrni to'g'ri deb faraz qilamiz: shundan keyin aksiomalar va oldin isbotlangan teoremalarga asoslanib mulohazalar yuritish yo'li bilan teorema shartiga zid keladigan yoki biror aksiomaga yoki ilgari isbotlangan biror teoremaga zid keladigan xulosaga kelamiz. Shunga ko'ra farazimiz noto'g'ri bo'ladi. Natijada teoremadagi yoki berilgan masaladagi da'vo to'g'ri degan xulosaga kelamiz.

Bilvosita isbotlash ikki xil usul bilan amalga oshiriladi:

1) Apagogik usul.

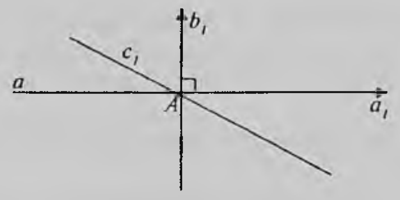
2) Ajratish usul.

Apagogik usul ko'pincha teskarisidan faraz qilish metodi deb ham yuritiladi. Quyidagi teoremani apagogik — **teskarisidan faraz qilish usuli** bilan isbot qilaylik.

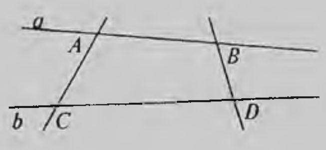
Teorema. To'g'ri chiziqning har bir nuqtasidan unga perpendikular to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin va faqat bitta.

Isboti. Faraz qilaylik, a — berilgan to'g'ri chiziq, A unda berilgan nuqta bo'lsin. a to'g'ri chiziqning boshlang'ich nuqtasi A bo'lgan yarim to'g'ri chiziqlaridan birini a_1 bilan belgilanadi, a_1 yarim to'g'ri chiziqdan boshlab 90° ga teng $(a_1{}^\wedge b_1)$ burchak qo'yiladi. U holda b_1 nurni o'z ichiga olgan to'g'ri chiziq a to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'ladi. Faraz qilaylik, A nuqtadan o'tib a to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lgan boshqa to'g'ri chiziq mavjud bo'lsin. Bu to'g'ri chiziqning b_1 nur bilan bir tekislikda yotuvchi yarim to'g'ri chizig'i c_1 bilan belgilanadi. Har biri 90° ga teng

(a_1b_1) va (a_1c_1) burchaklar a_1 yarim to'g'ri chiziqdan boshlab bitta yarim tekislikka qo'yilgan. Ammo berilgan yarim tekislikka a_1 yarim to'g'ri chiziqdan boshlab 90° ga teng bitta burchak qo'yish mumkin. Shu sababli A nuqta orqali o'tib a to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lgan boshqa to'g'ri chiziqning mavjudligi mumkin emas. Shu bilan teorema isbotlandi.



40-chizma.



41-chizma.

Masala. a va b uchrashmas to'g'ri chiziqlar berilgan. A va B nuqtalar a to'g'ri chiziqda, C va D nuqtalar b to'g'ri chiziqda yotadi. C va BD to'g'ri chiziqlarning o'zaro vaziyatini aniqlang (40-chizma).

Isboti. Ma'lumki, fazodagi ikki to'g'ri chiziq quyidagi uch holatdan birini egallaydi:

1. $AC \| BD$. 2. $AC \cap BD$. 3. AC va BD to'g'ri chiziqlar uchrashmas.

1. Faraz qilaylik, $AC \| BD$ bo'lsin, u holda bu to'g'ri chiziqlar a va b uchrashmas to'g'ri chiziqlar ham yetadigan birgina tekislikni aniqlaydi. Bu esa masala shartiga zid.

2. $AC \cap BD$ bo'lsin, u holda bu ikki kesishuvchi to'g'ri chiziqlar a va b uchrashmas to'g'ri b chiziqlar ham yotadigan birgina tekislikni aniqlaydi. Bu ham masala shartiga zid. Demak, AC va BD to'g'ri chiziqlar uchrashmas to'g'ri chiziqlardir.

5-§. Teoremalarni zaruriy va yetarli shartlari

Ta'rif. *Agar q mulohazadan p mulohazaning to'g'riligi kelib chiqsa, ya'ni q=>p bo'lsa, u holda p mulohaza q mulohaza uchun zaruriy shart bo'lib, q mulohaza esa p mulohaza uchun yetarli shart deyiladi.*

1- misol. Agar natural son juft bo'lsa, u holda u 6 soniga bo'linadi.

Bu teoremada natural son 6 ga bo'linishligi uchun uning juft bo'lishligi zaruriy shart bo'lib, yetarli shart bo'la olmaydi, chunki har qanday juft son ham 6 ga bo'linavermaydi.

2- misol. Agar natural son 6 ga bo'linsa, u holda u juft bo'ladi.

Bu teoremada natural son juft bo'lishligi uchun uning 6 ga bo'linishi yetarli shart bo'lib, zaruriy shart bo'la olmaydi, chunki 6 ga bo'linmaydigan juft sonlar ham mavjuddir.

3- misol. Agar natural son juft bo'lsa, u holda u 2 soniga bo'linadi.

Bu teoremada natural son 2 ga bo‘linishi uchun uning juft bo‘lishi zarur va yetarlidir, chunki har qanday juft natural son 2 ga bo‘linadi.

4- misol. Har qanday natural son 2 ga bo‘linsa, u holda bunday son juft bo‘ladi.

Bu teoremada natural son juft bo‘lishi uchun uning 2 ga bo‘linishi zarur va yetarlidir.

T e o r e m a. $[a, b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo‘lgan $y=f(x)$ funksiyaning $\int_a^b f(x)dx$ aniq integrali mavjud bo‘lishi uchun $\lim\limits_{\lambda\to 0}(S-s)=0$ bo‘lishligi zarur va yetarlidir.

Isbotining zarurligi. $\int_a^b f(x)dx$ aniq integral mavjud bo‘lganda $\lim\limits_{\lambda\to 0}(S-s)=0$ ekanligi isbotlanadi. Aniq integral mavjud bo‘lishligi uchun ta’rifga ko‘ra, $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma=1$ bo‘ladi. Limit ta’rifiga ko‘ra:

$$|\sigma-1|<\varepsilon \text{ yoki } -\varepsilon<\sigma-1<\varepsilon,\ 1-\varepsilon<\sigma<1+\varepsilon \qquad (1)$$

Ma’lumki, δ – integral yig‘indi Darbuning quyi va yuqori yig‘indilarining orasida yotar edi, shuning uchun

$$s\le\sigma\le S \qquad (2)$$

bo‘ladi. (1) va (2) larning birlashtirib quyidagi tengsizliklarni tuzamiz:

$$1-\varepsilon\le s\le\sigma\le S\le 1+\varepsilon. \qquad (3)$$

(3) tengsizlikda quyidagi tengsizliklarni ajratib olish mumkin:

$$\begin{pmatrix} I-\varepsilon<s \\ I+\varepsilon>S \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} I-s<\varepsilon \\ I-S>-\varepsilon \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} I-s<\varepsilon \\ S-I<\varepsilon \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} |s-I|<\varepsilon \\ |S-I|<\varepsilon \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \lim\limits_{\lambda\to 0}s=I \\ \lim\limits_{\lambda\to 0}S=I \end{pmatrix}\Rightarrow\left(\lim\limits_{\lambda\to o}s-\lim\limits_{\lambda\to o}s\right)\Rightarrow(I-I-0)\Rightarrow\lim\limits_{\lambda\to o}(S-s)=0.$$

Teoremaning zaruriy qismi isbotlandi.

Isbotining yetarligi. $\lim\limits_{\lambda\to 0}(S-s)=0$ bo‘lganda $\int_a^b f(x)dx$ bo‘lishligi ko'rsatiladi. Buning uchun $\lambda \to 0$ da σ integral yig'indisini chekli I limitga ega ekanligini ko'rsatish kifoya. Ma'lumki, Darbuning quyi yig'indisi monoton o'suvchi bo'lib, yuqoridan chegaralangandir, bundan tashqari u o'zining aniq yuqori chegarasiga ham egadir, ya'ni: $\sup\{s\}=I^*$

Suningdek, Darbuning yuqori yig'indisi o'zining quyi chegarasiga ega, ya'ni; $\inf\{S\} = I^*$.

Aniq yuqori va quyi chegaralarning ta'riflariga ko'ra $s \le I^*$ ва $S \le I^*$ bo'ladi. Bu ikkala tengsizliklarni birlashtirsak, $s \le I^* \le I^* \le S$.

Ammo $\lim_{\lambda\to 0}(S-s)=0$ bo'lgani uchun $\lim_{\lambda\to 0}(I^* - I_*)=0$

$$\left(\lim_{\lambda\to 0} I^* - \lim_{\lambda\to 0} I_* = 0\right) \Rightarrow \lim_{\lambda\to 0} I^* - \lim_{\lambda\to 0} I_* = I \qquad (2)$$

(2) ga ko'ra (1) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$s \le I \le S \qquad (3)$$

Ma'lumki, $\lim_{\lambda\to 0}(S-s)=0$, bundan tashqari $s \le \sigma \le S$ (4) bo'lgani uchun,

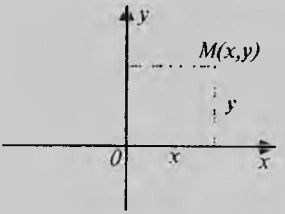
(3) va (4) larga ko'ra: $I = \int_a^b f(x)dx$. Shu bilan teoremaning yetarli qismi isbot bo'ldi.

6-§. Tekislikda dekart koordinatalarini kiritish

To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi. Ma'lumki, sonlar o'qida nuqtaning vaziyati bir son uning koordinatasi bilan aniqlanar edi. Endi to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi tushunchasi kiritiladi.

Tekislikda sanoq boshlari ustma-ust tushadigan va o'zaro perpendikular bo'lgan OX va OY sonlar o'qi chiziladi. Vertikal holda tasvirlangan sonlar o'qi ordinatalar o'qi, gorizontal holda tasvirlangan sonlar o'qi abssissa o'qi, ularning kesishgan nuqtasi koordinatalar boshi deyiladi. Hammasi birgalikda to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi deyiladi.

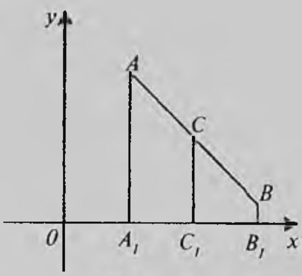
To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida nuqtaning vaziyati quyidagicha aniqlanadi. Faraz qilamiz, to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi olingan tekislikda ixtiyoriy M nuqta berilgan bo'lsin. Shu nuqtadan koordinata o'qlariga perpendikularlarning absissa o'qidagi proeksiyasiga mos keluvchi son uning absissasi, ordinatalar o'qidagi proeksiyasiga mos keluvchi son esa uning ordinatasi deyiladi va $M(x,y)$ tartibida yoziladi (41-chizma).



42-chizma.

Demak, to‘g‘ri burchakli koordinatalar tekisligidagi har qanday nuqta bir juft ma’lum tartibda berilgan son bilan aniqlanar ekan. Shuningdek, har qanday bir juft songa koordinatalar tekisligida bitta nuqta mos keladi.

Kesma o‘rtasining koordinatalari. $A(x_1,y_1)$ va $B(x_2,y_2)$ – ikkita ixtiyoriy nuqta va $C(x,y)$ nuqta AB kesmaning o‘rtasi bo‘lsin. C nuqtaning x va y koordinatalari topiladi. AB kesma y o‘qiga parallel bo‘lmasin, ya’ni $x_1 \neq x_2$ bo‘lsin. A, B, C nuqtalar orqali y o‘qiga parallel to‘g‘ri chiziqlar o‘tkaziladi. Bu to‘g‘ri chiziqlar x o‘qini



43-chizma.

$A_1(x_1,0)$, $B_1(x_2,0)$, $C_1(x,0)$ nuqtalarda kesib o‘tadi. Fales teoremasiga ko‘ra C_1 nuqta A_1B_1 kesmaning o‘rtasi bo‘ladi.

C_1 nuqta A_1B_1 kesmaning o‘rtasi bo‘lgani uchun $A_1C_1 = B_1C_1$, demak, $|x-x_1| = |x-x_2|$. Bundan: yo $x - x_1 = x - x_2$, yoki $x - x_1 = -(x - x_2)$.

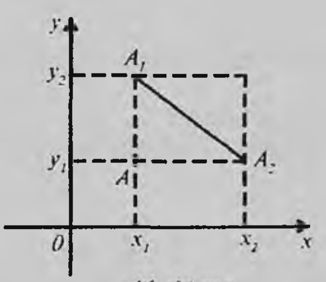
Birinchi tenglik o‘rinli emas, chunki $x_1 \neq x_2$. Shu sababli ikkinchi tenglik o‘rinli. Undan esa ushbu formula topiladi:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

$x_1 = x_2$, ya’ni AB kesma y o‘qiga parallel bo‘lsa, uchala nuqta – A_1, B_1, C_1 bir xil absissaga ega bo‘ladi. Demak, formula bu holda ham o‘rinli bo‘laveradi.

C nuqtaning ordinatasi ham shunga o‘xshash topiladi. A, B, C nuqtalar orqali o‘qiga parallel to‘g‘ri chiziqlar o‘tkaziladi. Ushbu formula hosil bo‘ladi:

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$



44-chizma.

Nuqtalar orasidagi masofa. xy tekislikda ikkita nuqta berilgan bo‘lsin: koordinatalari x_1, y_1 dan iborat A_1 nuqta va koordinatalari x_2, y_2 bo‘lgan A_2 nuqta. A_1 va A_2 nuqtalar orasidagi masofani ularning koordinatalari orqali ifodalaniladi.

$x_1 \neq x_2$ va $y_1 \neq y_2$ bo‘lsin, deylik. A_1 va A_2 nuqtalar orqali koordinata o‘qlariga parallel to‘g‘ri chiziqlar o‘tkaziladi va ularning kesishish nuqtasi A bilan belgilaniladi. A va A_1 nuqtalar orasidagi masofa $|y_2 - y_1|$ ga teng, A va A_1 nuqtalar orasidagi masofa esa

$$|x_2 - x_1| \tag{1}$$

ga teng. To‘g‘ri burchakli AA_1A_2 uchburchakka Pifagor teoremasi qo‘llanib topiladi:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2, \tag{2}$$

bunda dA_1 va A_2 nuqtalar orasidagi masofa.

Nuqtalar orasidagi masofa formulasini chiqarishda $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ deb faraz qilingan bo‘lsa ham, u boshqa hollar uchun ham o‘z kuchini saqlaydi. Haqiqatan ham, $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ bo‘lsa, $d = |y_2 - y_1|$ formula ham shu natijani beradi. $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ bo‘lgan hol ham shunga o‘xshash qaraladi. $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ holda A_1 va A_2 nuqtalar ustma-ust tushadi va formula $d = 0$ ni beradi.

Kesmani berilgan nisbatda bo‘lish. Bunday deganda quyidagi masala tushuniladi.

$M_1(x_1, y_1)$ va $M_2(x_2, y_2)$ nuqtalar berilgan. Koordinatalari noma’lum bo‘lgan uchinchi M nuqta M_1M_2 kesmani $\dfrac{M_1M}{MM_2} = \lambda$ nisbatda bo‘ladi ($\lambda -$ berilgan son) $M(x, y)$ nuqtani topish, ya’ni uning x, y koordinatalarini topish talab qilinadi.

Bizga parallel to‘g‘ri chiziqlar orasidagi M_1M, MM_2, N_1N va NN_2 kesmalar o‘zaro proporsional bo‘lishi elementar geometriyadan ma'lum. Shu sababli, masalaning shartini hisobga olib, $\frac{M_1M}{MM_2}=\frac{N_1N}{NN_2}=\lambda$ deb yoza olamiz.

Ammo (1) formulaga asosan:

$$N_1N=|x-x_1|, \qquad NN_2=|x_2-x|.$$

M nuqta M_1M_2 kesmada M_1 va M_2 nuqtalar orasida yotgani sababli va nuqtalarning har qanday vaziyatida ham $x-x_1$ va x_2-x ayirmalar bir paytda yo ikkalasi musbat, yoki manfiy bo'ladi. Shuning uchun

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}$$

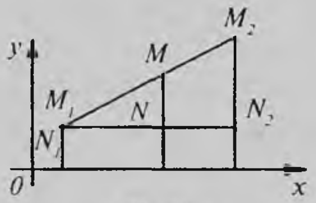
nisbat har doim musbat bo'ladi. Shuning uchun uni

$$\left|\frac{x-x_1}{x_2-x}\right|$$

nisbat o'rinda qarashimiz mumkin.

Shunday qilib,

$$\frac{M_1M}{MM_2}=\frac{N_1N}{NN_2}=\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda$$



45-chizma.

bundan M nuqtaning s absissasi topiladi.

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}. \tag{3}$$

M nuqtaning y ordinatasi ham shunday topiladi:

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \tag{4}$$

Xususiy holda, agar M nuqta M_1M_2 kesmani teng ikkiga bo'lsa, $\lambda=\frac{M_1M}{MM_2}=1$ bo'lib, (3) va (4) formulalar quyidagi ko'rinishni oladi:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \tag{3*}$$

$$y=\frac{y_1+y_2}{2}. \qquad (4^*)$$

Misol. $M_1(2,3), M_2(3,-3)$ nuqtalar orasidagi kesmani $\frac{2}{5}$ nisbatda bo'luvchi $M(x,y)$ nuqtani toping.

Yechish. Bu misolda $\lambda=\frac{2}{5}, x_1=2, x_2=3, y_1=3, y_2=-3$ (3), (4) formulalardan quyidagilar topiladi:

$$x=\frac{2+\frac{2}{5}\cdot 3}{1+\frac{2}{5}}=\frac{16}{7}, \qquad y=\frac{3+\frac{2}{5}\cdot(-3)}{1+\frac{2}{5}}=\frac{9}{7}.$$

Demak, izlanayotgan nuqta $M\left(\frac{16}{7}, \frac{9}{7}\right)$ ekan.

7-§. Vektor miqdorlarni o'rgatish metodikasi

Vektor va skalar miqdorlar. Tabiiy fanlarni o'rganishda (masalan, matematika, fizika, mexanika va astronomiya) ikki xil miqdor bilan ishlashga to'g'ri keladi; bulardan biri o'zining son qiymati bilangina aniqlanuvchi miqdorlar bo'lib, ikkinchisi esa, son qiymatidan boshqa yana o'zining fazodagi joylanishi bilan ham aniqlanadigan miqdorlardir. Masalan, uzunlik santimetrlar soni bilan, og'irlik — grammlar soni bilan, vaqt — sekundlar soni bilan, temperatura — graduslar soni bilan aniqlanadi. (Bunga misol qilib biror jismning yuzi, hajmi yoki undagi issiqlik miqdorini ham keltirish mumkin). Bunday (o'zining son qiymati bilangina aniqlanuvchi) miqdorlarni ***skalar miqdorlar*** yoki ***sonli miqdorlar*** deyiladi.

Ikkinchi xil miqdorlarga misol qilib mana shularni keltirish mumkin: to'g'ri chiziq bo'yicha harakatlangan jismning yurgan yo'li — shu to'g'ri chiziqning fazodagi vaziyati, u jismning shu to'g'ri uziziq bo'yicha qaysi yo'nalishda yurganligi va bu yo'lning uzunligi bilan to'la aniqlanadi (masalan, «shaharning ko'chasida 2 km yo'l yurdim« degan so'z, u yo'lning to'la ma'nosini ochib bera olmaydi. Lekin, «shaharning ma'lum bir ko'chasi bo'yicha falon joydan falon joygacha bordim« deyilsa, bu yo'lning nimadan iboratligi to'la aniqlanadi).

Biror jismga ta'sir etuvchi kuch ana shu kuch qo'yilgan nuqtaning o'rni, bu kuchning yo'nalishi va miqdori bilan to'la aniqlanadi.

Bunday (o'zining son qiymati, tekislikdagi va fazodagi vaziyati va yo'nalishi bilan aniqlanuvchi) miqdorlar ***vektor miqdorlar*** deb ataladi: Vektor miqdorlarni matematik jihatdan o'rganish – ularni abstrakt shaklda ko'rsatishni talab qiladi. Shuning uchun har qanday vektor miqdor – ma'lum uzunlikdagi, ma'lum vaziyatga va yo'nalishga ega bo'lgan kesma (to'g'ri chiziq kesmasi) orqali tassavir etiladi. Bu kesmaning uzunligi vektor miqdorning son qiymati (moduli)ni ko'rsatib, uning yo'nalishi vektor miqdorning yo'nalishi va bu kesma joylashgan to'g'ri chiziq esa, uning tekislikdagi yoki fazodagi vaziyatini ko'rsatadi. Bunday kesma ***vektor miqdor*** deb ataladi.

Vektorning bitta qalin harf orqali yoki ustiga kesmacha (yoki strelkacha) chizilgan bitta ingichka harf orqali ham tasvir etiladi.

Masalan, yoki $\bar{a}$ kabi yoziladi.

Vektorning uzunligini yozish uchun shu vektorni belgilovchi harflarni ikki parallel kesmalar bilan o'rab qo'yiladi yoki o'sha harflarning ingichkasi yoziladi. Masalan: $|\overline{AB}| = AB$ va $|\bar{a}| = a$.

Vektorlarning xillari. Vektorlar quyidagi ko'rinishlarda uchraydi:

Birinchisi – kuch ta'sir etuvchi nuqtaga bog'langan vektor.

Bunday vektorga qisqacha bog'langan yoki bog'liq vektor deyilib, bu – shu kuch qo'yilgan nuqtaning o'rni, kuchning yo'nalishi va miqdori bilan aniqlanadi.

Bu jumla geometrik vektorga nisbatan aytilsa, bunday bo'ladi: boshi aniq bir qo'zg'almas nuqtada yotgan vektorga bog'liq vektor deyiladi.

Ikkinchisi – bir to'g'ri chiziq bo'yicha harakatlanishi mumkin bo'lgan vektor bo'lib, bunga sirg'anuvchi yoki sirg'anma vektor deyiladi.

Bunday vektor o'zining uzunligi, yo'nalishi va o'zi joylashgan to'g'ri chiziqning fazodagi vaziyati bilan aniqlanadi.

Uchinchisi - boshi fazoning har qanday nuqtasiga qo'yilishi mumkin bo'lgan vektor bo'lib, bunga erkin vektor deyiladi; bunday vektor o'zining uzunligi va yo'nalishi bilangina aniqlanadi.

Sirg'anma va bog'liq vektorlar nazariyasini o'rganishda hamda umuman vektorlar haqidagi ta'limotni turli joylarda (ayniqsa geometriyada) ishlatishda erkin vektorlar nazariyasidan foydalanishga to'g'ri keladi. Shuning uchun erkin vektorlar nazariyasini o'rganishgagina to'xtalamiz.

Kolleniar, teng va qarama-qarshi vektorlar. Vektorlar ustida ba'zi amallarni bajarishda kolleniar, teng va qarama-qarshi vektorlar tushunchasidan foydalanishga to'g'ri keladi.

Ta'rif. Parallel to'g'ri chiziqlarda yoki bir to'g'ri chiziqda yotgan vektorlarni ***kolleniar vektorlar*** deb ataladi.

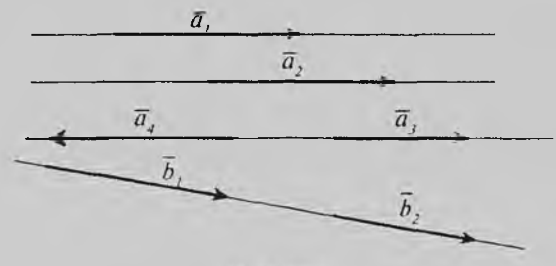
Eslatma: Kolleniar so'zi lotincha «birgalikda» yoki «umumiy» ma'nosidagi va chiziq ma'nosidagi so'zlaridan tuzilib, bu chiziqdosh degan ma'noni anglatadi.

Kolleniar (chiziqdosh) vektorlar bir xil yoki qarama-qarshi yo'nalishlarda bo'lishlari mumkin. Masalan, quyidagi chizmadagi vektorlardan $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$ va $\overline{a_4}$ lar o'zaro kolleniar bo'lganidek, o'sha chizmadagi $\overline{b_1}$ va $\overline{b_2}$ vektorlar ham kolleniardirlar.

Ta'rif. Parallel to'g'ri chiziqlarda yoki bir to'g'ri zichiqda yotib, teng uzunlikka va bir xil yo'nalishga ega bo'lgan vektorlar teng vektorlar deb ataladi.

Masalan, chizmadagi $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$ vektorlar parallel to'g'ri chiziqlarda yotib, teng uzunlikka va bir xil yo'nalishga ega bo'lgani uchun ular teng vektorlardir.

Vektorlar tengligini ham matematik miqdorlar tengligidagi kabi barobar "=" belgisi orqali ko'rsatiladi; chunonchi (46-chizma):



46-chizma.

O'sha chizmadagi $\overline{b_1}$ va $\overline{b_2}$ vektorlar ham bir-biriga teng.

Undagi $\overline{a_4} \neq \overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$ dir.

Shunga o'xshash $\overline{b_1}, \overline{b_2} \neq \overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \overline{a_4}$ dir.

Ta'rif. Uzunliklari teng bo'lib, yo'nalishlari qarama-qarshi bo'lgan ikki vektorga teng qarama-qarshi yoki qisqasi qarama-qarshi vektorlar deyiladi.

Masalan, yuqoridagi chizmadagi $\overline{a_3}$ va $\overline{a_4}$ vektorlarda $|\overline{a_3}| = |\overline{a_4}|$ bo'lib, yo'nalishlari qarama-qarshi bo'lgani uchun bular teng qarama-qarshi vektorlardir; bular orasidagi munosabat quyidagicha yoziladi:

$$a_3 = -a_4.$$

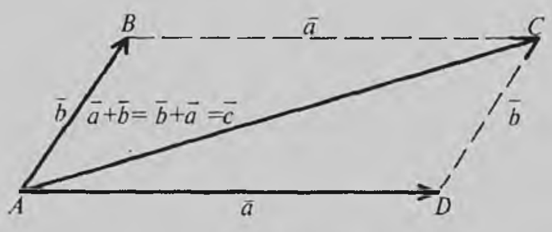
Vektorlarni qo'shish. Vektorlar ustida matematik amallarni bajarish zaruriyati hayotiy masalalarni yechish jarayonida kelib chiqqanligi shubhasizdir. Masalan, ikki vektorni bir-biriga qo'shishning zarurligi ketma-ket ikki siljishga teng uchinchi siljishni topish yoki bir nuqtaga ta'sir etuvchi ma'lum ikki kuchning teng ta'sir etuvchisi bo'lgan uchinchi bir kuchni topish kabi masalalarni yechish zaruriyatidan kelib chiqqandir.

Boshlari bir nuqtada yotgan ikki vektorni qo'shish uchun quyidagi ta'rifdan ma'lum bo'lgan parallelogramm qoidasi qo'llaniladi.

Ta'rif. Boshlari biror A nuqtada yotgan ikki AB va AD vektorning yig'indisi deb shu ikki vektorda yasalgan $ABCD$ parallelogrammning A uchidan C uchiga yo'nalgan va uzunligi AC diagonali uzunligiga teng bo'lgan AC vektorga aytiladi, ya'ni $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}$.

Eslatma. Bu, odatda, «kuchlar parallelogramm qonuni» deb yuritiladi. Bu qonun birinchi marta mashhur italyan olimi Leonardo da Vinchi (1452—1519) tomonidan ko'rsatilib, 1587-yilda esa, gollandiyalik olim Stevin tomonidan ravshanroq qilib bayon etilgan.

Boshlari bir nuqtada yotmagan ikki vektorni qo'shishda parallelo-gramm qoidasini qo'llash uchun, oldin u vektorlarni o'z-o'ziga parallel ko'chirib, ularning boshlari bir umumiy nuqtaga keltiriladi, so'ngra ular yuqoridagicha qo'shiladi (47-chizma).



47-chizma.

Vektorlarni ayirish. Vektorlarning ayirish, qo'shishning teskari amali sifatida qo'llaniladi, ya'ni ayirishda ikki vektorning yig'indisi va ulardan biri ma'lum bo'lganida ikkinchi qo'shiluvchi vektorni topish talab qilinadi. Shunga ko'ra ayirish amaliga quyidagi ta'rif beriladi.

Ta'rif. Bir vektordan ikkinchi vektorni ayirish deb shunday uchinchi vektorni topishga aytiladiki, buning ikkinchi vektor bilan qo'shganda birinchi vektor hosil bo'lsin, ya'ni $\bar{a} - \bar{b} = \bar{x}$ chiqishi uchun ushbu shart $\bar{x} + \bar{b} = \bar{a}$ mavjud bo'lishi kerak.

Bu ta'rifga ko'ra ikki $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning $\bar{a} - \bar{b}$ ayirmasini topish uchun quyidagi qoida qo'llanadi:

Qoida (uchburchak qoidasi). Berilgan $\bar{a}$ vektordan $\bar{b}$ vektorni ayirish uchun ixtiyoriy O nuqtadan boshlab $\overline{OA} = \bar{a}$ va $\overline{OB} = \bar{b}$ vektorlar yasaladi, so'ngra kamaytiruvchi $\overline{OB}$ vektorning B uchidan kamayuvchi $\overline{OA}$ vektorning A uchiga yo'nalgan $\overline{BA}$ vektor yasaladi. Keyingi vektor – izlangan ayirma bo'ladi.

Haqiqatan, $OA - \overline{OB} = BA$, chunki $\overline{OB} + \overline{BA} = \overline{OA}$ dir.

Agar keyingi tenglikning ikkala tomoniga $(-OB)$ ni qo'shsak, bu tenglik quyidagi ko'rinishga kiriladi: $\overline{BA} = \overline{OA} - \overline{OB} = \overline{OA} + (-OB)$.

Bundan quyidagi qoida ma'lum bo'ladi.

Qoida. Bir vektordan ikkinchi vektorni ayirish uchun o'sha birinchi vektorga ikkinchi vektorning qarama-qarshisini qo'shish kerak.

Vektorni songa ko'paytirish.

Ta'rif. Biror $\overline{AB}$ vektorni α (haqiqiy) songa ko'paytirish deb shunday yangi CD vektorni yasashga aytiladiki, buning uzunligi $\overline{AB}$ vektor uzunligini α sonning absolut qiymatiga ko'paytmasiga teng bo'lib, yo'nalishi esa $\alpha > O$ bo'lganida $\overline{AB}$ vektor bilan bir xil yo'nalishda va $\alpha < O$ bo'lganida bunga qarama-qarshi yo'nalishda bo'ladi.

Bunda aytilganlardan ravshanki, har qanday vektorni biror haqiqiy songa ko'paytirishdan hosil bo'ladigan yangi vektor oldingi vektor bilan bir to'g'ri chiziqda yotadi.

Endi, vektorlarni skalarga ko'paytirishning asosiy xossalarini quraylik:

1- xossa. Vektorni songa ko'paytirish o'rin almashtirish qonuniga bo'ysunadi, ya'ni $\bar{a} \cdot \alpha = \alpha \cdot \bar{a}$.

2- xossa. Vektorni songa ko'paytirish guruhlash qonuniga ham bo'ysunadi, ya'ni: $\alpha\left(\beta\bar{a}\right)=(\alpha\beta)\bar{a}$.

3- xossa. Vektorni songa ko'paytirish, son ko'paytuvchiga nisbatan tarqatish qonuniga bo'ysunadi, ya'ni vektorni sonlar yig'indisiga ko'paytirish uchun uni qo'shiluvchilarning har biriga ko'paytirib, bundan chiqqan yangi vektorlarni bir-biriga qo'shish mumkin:

$$\bar{a}(\alpha+\beta)=\alpha\bar{a}+\beta\bar{a}.$$

Ikki vektorning skalar ko'paytmasi.

Ta'rif. Ikki vektorning skalar ko'paytmasi deb bu vektorlar uzunliklarining ular orasidagi burchak kosinusi bilan ko'paytmasiga aytiladi. Masalan, $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning $\bar{a}\cdot\bar{b}$ skalar ko'paytmasi qo'yidagicha bo'ladi:

$$\bar{a}\ \bar{b}=ab\cos\left(\bar{a},\bar{b}\right).$$

Bu ta'rifdan ravshanki, skalar ko'paytma vektor emas, balki sondir. Skalar ko'paytma yana bunday ham ta'riflanadi:

Ta'rif. Ikki vektorning skalar ko'paytmasi deb bulardan birining uzunligini ikkinchisining birinchisi yo'nalishdagi proyeksiyasi bilan ko'paytmasiga aytiladi.

Proyeksiyalar nazariyasida biror $\bar{b}$ vektorning $\bar{a}$ vektori yo'nalishidagi proyeksiyasi quyidagicha bunday ifodalanishi ma'lum edi:

$$np_a\bar{b}=\cos\left(\bar{a},\ \ \bar{b}\right)=\bar{b}_a.$$

Takrorlash uchun savollar

1. *Ta'rif so'zini lug'aviy ma'nosini aytib bering.*
2. *Teoremaning qanday turlari bor?*
3. *Teoremani isbotlash deganda nimani tushunasiz?*
4. *Isbotning qanday turlari bor?*
5. *Teoremalarning zaruriy va yetarli shartlarini ayting.*
6. *Geron formulasini isbotlang.*
7. *Tekislikda dekart koordinatalari qanday beriladi?*
8. *Kesma o'rtasining koordinatalari qanday topiladi?*
9. *Nuqtalar orasidagi masofa deganda nimani tushunasiz?*
10. *Kesmani berilgan nisbatda bo'lish qanday amalga oshiriladi?*
11. *Skalar miqdor deganda nimani tushunasiz?*
12. *Vektor qanday miqdor?*

13. Ikki vektorning skalar ko'paytmasi qanday amalga oshiriladi?

14. Vektorlarni qo'shishning uchburchak va parallelogramm qoidalarini tushuntiring.

Tayanch iboralar

Teorema, analogiya, zaruriy va yetarli shart, perimetr, to'g'ri teorema, teskari teorema, postulat, aksioma, qabariq va botiq ko'pburchak, tekislikda dekart koordinatalari, kesma o'rtasining koordinatalari, nuqtalar orasidagi masofa, kesmani berilgan nisbatda bo'lish, skalar miqdor, vektor, ikki vektorning skalar ko'paytmasi, vektorlarni qo'shishning uchburchak va parallelogramm qoidalari.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. *Karimov I.A.* «Kadrlar tayyorlashning milliy dasturi», T. «O'zbekiston», 1997.

2. *Azlarov T., Monsurov X.* Matematik analiz. -T.: «O'qituvchi». 1986.

3. Algebra va analiz asoslari: o'rta maktablarning 10-11 sinflari uchun darslik (Sh.O. Alimov, Yu.M.Kolyagin, Yu.V.Sidorov, M.I.Shabunin) T., «O'qituvchi», 1996 va uning keyingi nashrlari.

4. *Alixonov S.* «Geometriya darslarida umumlashtirish» T., «O'qituvchi», 1989.

5. *Alixonov S.* «Matematika o'qitish metodikasi». T., «O'qituvchi» 1992.

6. *Alixonov S.* «Matematika o'qitish metodikasi» Qayta ishlangan II nashri. T., «O'qituvchi» 1997 va boshqalar elementar matematikadan masalalar.

7. *Antonov K. P.* To'plam. «O'qituvchi», 1975.

8. *Bikboyeva N.U.* va boshqalar «Boshlang'ich sinflarda matematika o'qitish metodikasi», T., «O'qituvchi», 1996.

9. *G'aybullayev N., Ortiqov.* «Geometriya 7-sinf uchun darslik» T. «O'qituvchi», 1998.

10. *G'aybullayev N., Ortiqov.* «Geometriya 8-sinf uchun darslik» T. «O'qituvchi», 1999.

11. *Galitskiy M.A.* va boshqalar «Algebra va matematik analiz kursini chuqur o'rganish» T., «O'qituvchi», 1995.

12. *Давидов В.В.* «Возростная и педагогическая психология». М,. Педагогика, 1992.

13. *Икрамов Дж.И.* «Математическая култура шаколника». Т., «O'qituvchi», 1981.

14. *Ikramov Dj. I. Дж.И.* va boshqalar «Matematika, 5-6 sinflar uchun darslik», T., «O'qituvchi», 1997.

15. *Кларин М.В.* «Инноватсионные модели обучения в забужных педагогических поисках», М., «Просвешение», 1994.

16. *Kollogarov A. N.* Tahriri ostida. Algebra va analiz asoslari. 10–11 sinflar uchun darslik. -T.: «O'qituvchi». 1992.

17. *Колягин Ю. Н.* va boshqalar Metodika предавания математики в средней школе. Общая методика. М., «Просвешение», 1988.

18. *Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г.* «Практикум по элементарной математике» М. Изд-во, «АВГ», 1995.

19. *Ляшенко С. Е.* «Лабораторное и практические работы по методике преродавания математики» М., «Посвешение», 1988.

20. Методика предования математики в средней школе. (Под редакции Мишина). М. Просвешение, 1988.

21. *Погорелов А.В.* «Геометрия 7–11 кл. «М., «Просвешение», 1995.

22. *Столяр А.А.* «Методы обучения математике» Минск, «Вершая школа» 1993.

23. *Столяр А.А.* «Педагогика математики» Минск, «Вершая школа», 1988

24. *Фридман Л.М.* Как решат задачи. М., «Просвешение» 1988.

MUNDARIJA

So'zboshi 3

I BOB. UMUMTA'LIM MAKTABLARDA MATEMATIKA O'QITISH MASALALARI

1-§. Matematika o'qitish metodikasi predmeti 5
2-§. O'rta umumta'limiy maktablarda matematika o'qitishning maqsadi 7
3-§. Matematika o'qitish metodikasining boshqa fanlar bilan aloqasi 9
4-§. Ta'limning isloh qilinishi 10

II BOB. MATEMATIKA DARSLARIDA BILISHNING TURLARI VA XULOSA CHIQARISH METODLARI

1-§. Matematik tushuncha 13
2-§. Matematik tushunchalarning ta'riflash metodikasi 15
3-§. Matematik tushunchalarni kiritish metodikasi 17
4-§. Matematik tushunchalarni kiritishning abstrakt-deduktiv metodi 18
5-§. Matematik hukm 22
6-§. Matematik xulosa 23

III BOB. MAKTAB MATEMATIKA KURSIDA TA'LIM METODLARI

1-§. Matematik ta'lim metodlari 31
2-§. Matematika o'qitishdagi ilmiy izlanish metodlari 31
3-§. Tajriba va kuzatish metodi 32
4-§. Taqqoslash metodi 33
5-§. Analiz va sintez metodi 34
6-§. Umumlashtirish metodi 38
7-§. Abstraksiyalash metodi 47
8-§. Aniqlashtirish metodi 48
9-§. Klassifikatsiyalash metodi 48
10-§. Evristik ta'lim metodi 49
11-§. Matematika darslarida muammoli ta'lim 52

IV BOB. O'QUVCHILARNING MATEMATIK TAFAKKURLARINI SHAKLLANTIRISH METODIKASI

1-§. Matematik ta'lim jarayonida masalaning roli va o'rni....60
2-§. Matematika o'qitishda masalaning bajaradigan funksiyalari....63
3-§ Matematika darslarida didaktikprinsiplar....68

V BOB. MATEMATIK TA'LIMNI TASHKIL QILISH METODIKASI

1-§. Matematika darsining tuzilishi va uni tashkil qilish metodikasi....72
2-§. Matematika darsining turlari....74
3-§. Matematika darsiga tayyorgarlik va darsning tahlili....80
4-§. Matematika darsiga qo'yilgan talablar....82
5-§. O'quvchilarning bilimlarini tekshirish....83

VI BOB. SON TUSHUNCHASINI KIRITISH, UNI KENGAYTIRISH VA SONLAR USTIDA AMALLAR BAJARISH METODIKASI

1-§. Natural son tushunchasini kiritish va ular ustida amallar bajarish metodikasi....88
2-§. Natural sonlar to'plamini kengaytirish....92
3-§. Butun sonlar va ular bilan to'rt amalni bajarish metodikasi....93
4-§. Kasr son tushunchasini kiritish va uni o'rgatish metodikasi....96
5-§. Kasrlarni taqqoslash....100
6-§. Kasrlarni qo'shish....100
7-§. Kasrlarni ayrish....102
8-§. Kasrlarni ko'paytirish....104
9-§. Kasrlarni bo'lish....106
10-§. O'nli kasrlar va ular bilan to'rt amalni bajarish metodikasi....107
11-§. O'nli kasrlarni qo'shish va ayirish....108
12-§. O'nli kasrlarni ko'paytirish....109
13-§. O'nli kasrlarni bo'lish....111
14-§. Oddiy kasrni cheksiz davriy kasrga aylantirish....112
15-§. Cheksiz davriy o'nli kasrni oddiy kasrga aylantirish....114
16-§. Irratsional son tushunchasini kiritish metodikasi....115
17-§. Haqiqiy sonlar....117
18-§. Haqiqiy sonlar ustida amallarni bajarish qoidalari....119
19-§. Arifmetik kvadrat ildiz tushunchasi kiritish....119
20-§. Arifmetik to'rt amalga doir misollar yechish metodikasi....120

VII BOB. MAKTABDA AYNIY SHAKL ALMASHTIRISHLARNI O‘RGATISH METODIKASI

1-§. Ayniy shakl almashtirishlar..125
2-§. Kasr ifodalarni ayniy almashtirish...128
3-§. Irratsional ifodalarni ayniy almashtirish...132
4-§. Trigonometrik ifodalarni ayniy almashtirish..143
5-§ Trigonometrik ifodalarni soddalashtirishga doir misollar yechish metodikasi...154

VIII BOB. TENGLAMALARNI O‘RGANISH METODIKASI

1-§. Tenglama tushunchasini kiritish metodikasi..159
2-§. Chiziqli tenglamalar...163
3-§. Parametrik usulda berilgan kasr-ratsional tenglamalarni yechish.......164
4-§. Noma’lum absolut miqdor belgisi ostida qatnashgan tenglamalarni yechish metodikasi.....................................165
5-§. Kvadrat tenglama tushunchasini kiritish metodikasi...........................168
6-§. Viyet teoremasi..171
7-§. Kvadrat tenglamaga keltirib yechiladigan tenglamalar........................173
8-§. Irratsional tenglamalarni yechish...180
9-§. Parametrli irratsional tenglamalarni yechish...185
10-§. Irratsional tenglamalar sistemasini yechish...189
11-§. Ko‘rsatkichli tenglamalar..192
12-§. Logarifmik tenglamalar..196
13-§. Parametrli logarifmik va ko‘rsatkichli tenglamalarni yechish..........200
14-§. Ko‘rsatkichli va logarifmik tenglamalar sistemasini yechish...........204
15-§. Ko‘rsatkichli va logarifmik tenglamalarni grafik usulda yechish.......207
16-§. Trigonometrik tenglamalar...210
17-§. Parametrli trigonometrik tenglamalarni yechish..................................218
18-§. Trigonometrik tenglamalar sistemasini yechish...................................222
19-§. Masalalarni tenglama tuzish bilan yechish metodikasi........................225
20-§. Matematika darslarida tengsizliklarni o‘qitish metodikasi.................235

IX BOB. FUNKSIYA, INTEGRAL VA DIFFERENSIAL TANGLAMA TUSHUNCHASINI KIRITISH VA ULARNI O‘RGATISH METODIKASI

1-§. Funksiya tushunchasini kiritish va ini o‘rgatish metodikasi...................240
2-§. Sonlar ketma-ketligi va uning limitini o‘rgatish metodikasi...........248
3-§. Hosila va uning ustida amallar bajarish metodikasi.............................252

4-§. Hosilani hisoblash qoidalari..260
5-§. Integral va uning tatbiqlarini o'rgatish metodikasi...............................262
6-§. Differensial tenglamalar..267

X BOB. GEOMETRIYA KURSINING AKSIOMATIK QURILISHI AKSIOMA, POSTULAT, TEOREMA VA UNING TURLARINI O'RGATISH METODIKASI

1-§. Matematik hukmning turlari..272
2-§. Postulat...274
3-§. Teorema va uning turlari..275
4-§. Teoremalarni isbotlash metodlari..279
5-§. Teoremalarni zaruriy va yetarli shartlari...285
6-§. Tekislikda dekart koordinatalarini kiritish..287
7-§. Vektor miqdorlarni o'rgatish metodikasi...291
FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR...298